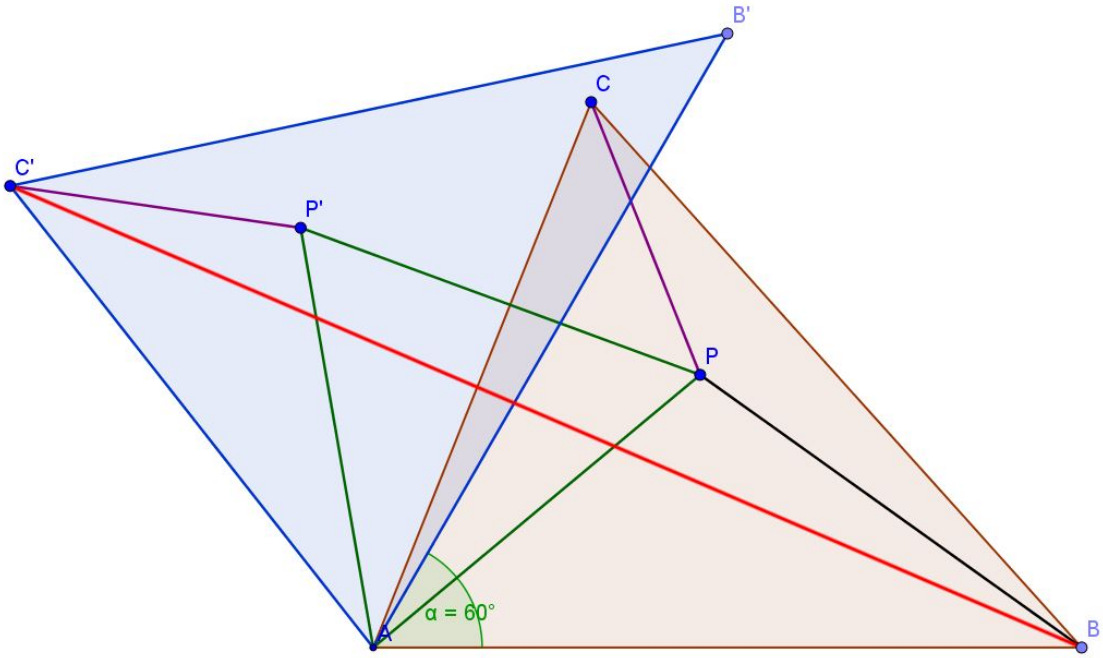
Emelt szintű érettségi matematikából



Segédlet a szóbeli vizsgához

Fábián István

pisti@fabianfamily.hu

Dunaújváros, 2017

Kézirat

A témakörök kidolgozását a legjobb tudásom szerint igyekeztem megtenni. Azonban a többszöri átnézés után is maradhattak benne hibák, hiányosságok. Ennek következtében:

Jogi nyilatkozat

Ebben a kéziratban legjobb meggyőződésem szerint megbízható információkat közlök.

Nem vállalok kötelezettséget és garanciát az információk teljességének vagy pontosságának hiányából adódó következményekért, nem vagyok kötelezhető a kéziratban található információk javítására és frissítésére, továbbá nem vállalok felelősséget a kéziratban található információk használatából eredő bármilyen természetű kárért.

A felelősség elhárítása

A kézirat rendeltetése csupán a személyes használat, célja, hogy matematikából az emelt szintű szóbeli érettségi vizsgára való felkészüléshez támogatást nyújtson. Nem garantálom, hogy a kézirat teljes mértékben kielégíti a felhasználó igényeit.

Nem viselek semmilyen közvetlen vagy közvetett felelősséget a károkért, amelyeket a felhasználók vagy harmadik felek okoztak a kézirat helyes vagy helytelen használatával maguknak vagy másoknak.

Fenntartom magamnak a jogot, hogy bármikor, előzetes figyelmeztetés nélkül módosítsam a kéziratot.

A kézirat lezárva: 2017. július 31.

Tartalomjegyzék

Előszó 5

Bevezetés 6

Vizsgázói taktikák a szóbelin 8

Kidolgozott tételek 9

1. tétel: Halmazok, halmazműveletek. Nevezetes ponthalmazok a síkban és a térben. 10

2. tétel: Racionális és irracionális számok. Műveletek a racionális és irracionális számok halmazán. Közönséges törtek és tizedes törtek. Halmazok számossága. 14

3. tétel: Oszthatóság, oszthatósági szabályok és tételek. Prímszámok. Számrendszerek. 19

4. tétel: A matematikai logika elemei. Logikai műveletek. Állítás és megfordítása, szükséges és elégséges feltételek, bemutatásuk tételek megfogalmazásában és bizonyításában. 24

5. tétel: Hatványozás, a hatványfogalom kiterjesztése, a hatványozás azonosságai. Az *n*-edik gyök fogalma. A négyzetgyök azonosságai. Hatványfüggvények és a négyzetgyökfüggvény. 28

6. tétel: A logaritmus fogalma és azonosságai. Az exponenciális és a logaritmusfüggvény. 33

7. tétel: Egyenletmegoldási módszerek, ekvivalencia, gyökvesztés, hamis gyök. Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek. 37

8. tétel: A leíró statisztika jellemzői, diagramok. Nevezetes középértékek. 41

9. tétel: Számsorozatok és tulajdonságaik (korlátosság, monotonitás, konvergencia). Műveletek konvergens sorozatokkal. A számtani sorozat, az első *n* tag összege. 44

10. tétel: Mértani sorozat, az első *n* tag összege, végtelen mértani sor. Kamatszámítás, gyűjtőjáradék, törlesztőrészlet. Exponenciális folyamatok a társadalomban és a természetben. ... 48

11. tétel: Függvények lokális és globális tulajdonságai. A differenciálszámítás és alkalmazásai. 53

12. tétel: Derékszögű háromszögekre vonatkozó tételek. A hegyesszögek szögfüggvényei. A szögfüggvények általánosítása. 56

13. tétel: Háromszögek nevezetes vonalai, pontjai és körei. 59

14. tétel: Összefüggések az általános háromszögek oldalai között, szögei között, oldalai és szögei között. 63

15. tétel: Egybevágóság és hasonlóság. A hasonlóság alkalmazásai síkgeometriai tételek bizonyításában. 66

16. tétel: A kör és részei. Kerületi szög, középponti szög, látószög. Húrnégyszögek, érintőnégyszögek. 70

17. tétel: Vektorok, vektorműveletek. Vektorfelbontási tétel. Vektorok koordinátái. Skaláris szorzat. 76

18. tétel: Szakaszok és egyenesek a koordinátasíkon. Párhuzamos és merőleges egyenesek. Elsőfokú egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek grafikus megoldása. 80

19. tétel: A kör és a parabola a koordinátasíkon. Kör és egyenes, parabola és egyenes kölcsönös helyzete. Másodfokú egyenlőtlenségek grafikus megoldása. ... 83

20. tétel: Térelemek távolsága és szöge. Térbeli alakzatok. Felszín- és térfogatszámítás. ... 86

21. tétel: Területszámítás elemi úton és az integrálszámítás felhasználásával. ... 90

22. tétel: Kombinációk. Binomiális tétel, a Pascal-háromszög. A valószínűség kiszámításának kombinatorikus modellje. A hipergeometrikus eloszlás. ... 93

23. tétel: Permutációk, variációk. A binomiális eloszlás. A valószínűség kiszámításának geometriai modellje. ... 97

24. tétel: Bizonyítási módszerek és bemutatásuk tételek bizonyításában. ... 100

Felhasznált irodalom ... 103

1. számú kiegészítés – A valós számok axiómarendszere (a valós számtest) ... 104

2. számú kiegészítés – Vektorok, vektortér, skaláris és vektoriális szorzat ... 107

Képlettár 2017 ... 111

Szaffinak és – különösen! – Kasmírnak, akik segítettek és segítenek „elviselni az elviselhetetlent”…

Előszó

Több évtizede tanítok emelt óraszámú csoportokat (hívták már fakultációnak, ESZÉF-nek stb.), és készítem föl diákjaimat egyetemi-főiskolai felvételire.

Annak idején ún. központi írásbeli érettségi-felvételi dolgozatot kellett írniuk, majd az általuk megjelölt felsőoktatási intézménybe szóbeli vizsgára hívták be őket – több olyan tanítványom volt, akinek így három helyre is el kellett mennie. E vizsgákon az ott tanítók kérdezték őket, akik általában nem ismerték pontosan a középiskolai anyagot, jó esetben azért volt köztük középiskolai tanár. Magam is többször voltam felvételi bizottság tagja a Dunaújvárosi Egyetemen mind matematikából, mind fizikából.

2005 után, a kétszintű érettségi bevezetésével nagymértékben egyszerűsödött a helyzet, egyetlen szóbeli vizsgát kell csak tenni, és a bizottságok tagjai is középiskolai tanárok, akik tisztában vannak a tananyaggal. Én örültem ennek a változásnak.

Sajnos azonban történtek más változások is: valamikor a diákoknak még ki lehetett adni a különböző témaköröket önálló feldolgozásra, amelyeket aztán órán közösen megbeszéltünk, így készülve a szóbelire. Mert akkoriban még az előírt tananyag és a rendelkezésre álló időkeret ezt megengedte. Ma már erre időnk sincs (legfeljebb az érettségi írásbelik utáni és szóbelik előtti időszakban), illetve a tanulók hozzáállása is megváltozott – jobb szeretnek már meglévő anyagokat megtanulni.

(Feleségem – aki magyartanár – nagyon plasztikusan fogalmazott: tizenöt éve még csak néhány gyerek volt, aki nem olvasta el a kötelező olvasmányokat, tíz éve csak néhány gyerek volt, aki nem olvasta el a kötelező olvasmányok rövidített kivonatát, újabban pedig már csak néhány diák van, aki elolvassa legalább a rövidített változatot… ☹)

Ezt az igényt felismerve a könyvkiadók minden évben megjelentetnek különböző kiadványokat ebből a célból (némelyikükben sajnos szakmai tévedések is előfordulnak nagy számban).

Megítélésem szerint azonban ezek a könyvek – a terjedelem-ár kapcsolat nem elhanyagolható mivolta miatt – jóval többet tartalmaznak, mint ami valóban szükséges egy sikeres szóbelihez, és ami belefér 20 percbe.

Ez vezetett oda, hogy megpróbáljak összeállítani egy olyan segédanyagot, amely megtanulható, és – *véleményem szerint!* – elegendő egy sikeres szóbeli vizsgához.

Remélem, sikerrel járok.

A szerzői jogokról: dolgozatom szabadon felhasználható, átírható, kiegészíthető és javítható (*Public Domain*) – a rá való hivatkozást pedig megköszönöm… ☺

Az esetlegesen előforduló hibákat, kérem, írják meg a pisti@fabianfamily.hu ímélcímre, hogy javítani tudjam azokat.

Bevezetés

A következőkben néhány fontos tudnivaló az érettségi vizsga részletes követelményeit tartalmazó 40/2002. számú OM-rendeletből (*a matematikára vonatkozó rész*):

„Az emelt szintű szóbeli vizsga központi tételsor alapján zajlik.

A tételt a vizsgázónak önállóan kell kifejtenie. Közbekérdezni csak akkor lehet, ha teljesen helytelen úton indult el, vagy nyilvánvaló, hogy elakadt. (Ez esetben segítő kérdést lehet feltenni, amennyiben az még a felelési időbe belefér.)

A szóbeli vizsgára legalább húsz tételt kell készíteni. A tételsort úgy kell összeállítani, hogy tematikailag fedje le a követelményrendszert. A tételek feladatait minden évben frissíteni kell.

Vizsgázónként szükséges segédeszköz a tételsorban szereplő feladatokhoz kapcsolódó összefüggéseket tartalmazó képlettár, melyet a vizsgabizottságot működtető intézmény biztosít, továbbá szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológép, körző, vonalzó, szögmérő, melyekről a vizsgázó gondoskodik.

Az egyes tételek egy-egy témából kerülnek ki. A tétel címében megjelölt témát logikusan, arányosan felépített, szabad előadásban kell kifejtenie a vizsgázónak. A feleletben feltétlenül szerepelniük kell az alábbi részleteknek:

– egy, a témához tartozó, a vizsgázó választása szerinti definíció pontos kimondása;

– egy, a témához tartozó, a vizsgázó választása szerinti tétel pontos kimondása és bizonyítása;

– a kitűzött feladat megoldása;

– a téma matematikán belüli vagy azon kívüli alkalmazása, illetve matematikatörténeti vonatkozása (több ismertetése vagy egy részletesebb bemutatása).

A tételeket úgy kell összeállítani, hogy a nehézségük (az általuk átfogott tananyagrészek nagysága és mélysége) közel azonos legyen. Ügyelni kell arra, hogy a tételben kitűzött feladat nehézsége az egyes tételeket tekintve körülbelül azonos legyen.

A vizsgán használható képlettárat és a tételcímeket nyilvánosságra kell hozni.

A szóbeli vizsgarész értékelése

A szóbeli vizsgán elérhető pontszám 35. Az értékelés központi értékelési útmutató alapján történik.

Az értékelési szempontok

A felelet tartalmi összetétele, felépítésének szerkezete 10 pont, ezen belül

- Logikus felépítés, szerkesztettség, tartalmi gazdagság 6 pont
  Ebben a pontban kell értékelni a feleletben szereplő, a témához illő definícióknak, a kimondott tételnek és bizonyításának a nehézségét is.
- A felelet matematikai tartalmi helyessége 4 pont

A feleletben szereplő, **a témához illő definíció helyes kimondása 2 pont**

Ha több definíciót is elmond, akkor a definícióra adható 2 ponttal a legjobbat kell értékelni.

A feleletben szereplő, **a témához illő tétel helyes kimondása és bizonyítása 6 pont**, ezen belül

- A tétel helyes kimondása 2 pont
- A tétel helyes bizonyítása 4 pont

A kitűzött feladat helyes megoldása 8 pont.

Ha a feladatot csak a vizsgáztató segítségével tudja elkezdeni, akkor maximum 5 pont adható.

Alkalmazások ismertetése 4 pont.

Egy, a tételhez illő alkalmazás vagy matematikatörténeti vonatkozás részletes kifejtése, vagy 3-4 lényegesen eltérő alkalmazás vagy matematikatörténeti vonatkozás rövid ismertetése.

Matematikai nyelvhasználat, kommunikációs készség 5 pont, ezen belül

- Matematikai nyelvhasználat 2 pont
- Önálló, folyamatos előadásmód 2 pont
- Kommunikáció 1 pont (*Ez utóbbi 1 pont akkor is jár, ha a vizsgázó önálló felelete után nem volt szükség kérdésre.*)"

Magam is több éve vizsgáztatok emelt szinten, hol elnökként, hol kérdező tanárként, sok jó és rossz feleletet hallottam. A vizsgázók által elkövetett hibák általában (a tudáshiányon túl…) az ezen jogszabályban megfogalmazottak, az értékelési szempontok nem ismeretének következményei.

Így írásomat igyekszem a fentiek figyelembe vételével elkövetni, különös tekintettel a rendelkezésre álló 20 perces időre.

Néhány fontos megjegyzés, rövidítésmagyarázat:

- Nálam egy tételbizonyítás a következőkből áll:
  Tétel: *pontos kimondás.*
  Bizonyítás: *értelemszerűen*, továbbá *a bizonyítás befejeztét mindig jelezni kell valahogy*, például „*Ezt akartuk bizonyítani.*" vagy „*Q. e. d.*" vagy „*Ez volt a tétel állítása.*" vagy nálam „//".
- Ügyeljünk arra, hogy a választott tétel bizonyítása ne legyen nagyon könnyű, ugyanis a bizottság ennek nehézségét is értékeli a „logikus felépítés, szerkesztettség, tartalmi gazdagság 6 pont"-jában.
- Geometriafeladatoknál elkerülhetetlen egy jó ábra, ennek felhasználására én mindig használom a **HÁJ!** jelölést, amely a „*Használjuk az ábra jelöléseit!*" mondat rövidítése.
- További rövidítések: **T** = tétel, **D** = definíció.
- Írásomban a matematikai kifejezéseket a MathType programmal készítettem, míg az ábrákat a GeoGebra felhasználásával.
- A dolgozat a 2017. májusi vizsgaidőszakra kiadott témakörök alapján készült (ez nagyjából megegyezik a korábbi évek témaköreivel), szükség esetén a 2017 decemberében az OH által nyilvánosságra hozandó témaköröknek megfelelően a téli szünetben át fogom írni.

Vizsgázói taktikák a szóbelin

Körülbelül 150 saját letett vizsgán túl tapasztalataim a következők:

- nem lehet minden tételt egyformán jól megtanulni;
- tudomásul kell venni, hogy vannak jobb és kevésbé jobb tételek;
- nem szabad előre eldönteni, hogy ezt a tételt akarom, a másikat meg nem kihúzni. Ha ugyanis nem jön össze a célom, akkor könnyen leblokkolhatok – és így biztos rossz is lesz az a tétel.

Már az ősember is különböző mágikus eljárásokat vetett be annak érdekében, hogy előzetesen biztosítsa cselekedete sikerességét – ne féljünk mi se ettől! Mondogassuk magunknak, hogy sikerülni fog a vizsga, erősítsük magunkban a hitet! Higgyék el, ez sokat jelent.

Oliver Cromwell, az angol polgári forradalom egyik vezetőjének mondását szoktam ezzel kapcsolatban idézni: „Bízz *Istenben, és tartsd szárazon a puskaport!*" – szólt a döntő csata előtti esős estén katonáihoz. Tanuljunk, aztán bízzunk magunkban.

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/88/Charles_Landseer_Cromwell_Battle_of_Naseby.JPG

A feleletre legfeljebb 20 perc áll rendelkezésre, ezalatt kell ismertetni a kitűzött feladat megoldását, illetve elmondani a tételt – a vizsgázó által választott sorrendben.

Ha megítélésünk szerint sikerült megoldani az – általában nem túl nehéz – feladatot, akkor érdemes azzal kezdeni, hogy aztán a maradék időt teljes egészében a tétel elmondására fordíthassuk, figyelve arra, hogy az alkalmazások kifejtésére is jusson időnk (erre egyébként felelet közben szoktak is a vizsgáztatók figyelmeztetni).

Ellenkező esetben kezdjük a tétel kifejtésével, előzetesen jelezve a vizsgabizottságnak, hogy a feladattal nem vagy nem teljesen boldogultunk. Ezzel felhívjuk a figyelmüket arra, hogy a feladattal kapcsolatban még dolguk lesz, hogy erre is szánniuk kell időt.

Arra az esetre, ha egyik résszel sem boldogultunk, nem igazán tudok jó tanácsot adni… ☺

Kidolgozott tételek

1. tétel: Halmazok, halmazműveletek. Nevezetes ponthalmazok a síkban és a térben.

A halmaz a matematika egyik legfontosabb fogalma, mai tudásunk szerint matematikai ismereteink teljes egészében visszavezethetők a halmazelméletre.

A halmazelmélet fejlődése a 19. század végén indult, és a 20. században nyerte el jelenleg ismert formáját.

A *halmaz* és az *eleme* fogalmát nem definiáljuk, alapfogalomnak tekintjük, legfeljebb más szavakkal (összesség, csoport, benne van stb.) tudjuk körülírni. **Megállapodás szerint akkor beszélhetünk halmazról, ha bármely dologról egyértelműen eldönthető, hogy hozzátartozik vagy nem.**

A halmaz elemeit általában kisbetűvel, magát a halmazt nagybetűvel jelöljük: $a \in A$; $b \notin A$. Egy halmazban egy elem pontosan egyszer szerepel.

Néhány speciális számhalmaz külön nevet kapott, ezek jelét vastag betűvel írjuk: **N**; **Z**; **Q**; **Q***; **R**, illetve $\mathbf{Z}^+$; $\mathbf{R}^-$ stb.

A halmazokat megadhatjuk elemeik felsorolásával vagy a halmaz elemeire jellemző tulajdonsággal, például: $A := \{a;b;c;d\}$; $B := \{x \in Z^+ \mid x \leq 5\}$; $C := \{\text{József Attila versei}\}$.

D: Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, üres halmaznak nevezzük. Jele: $\{\ \}$ vagy $\varnothing$.

D: Két halmaz egyenlő, ha ugyanazok az elemeik, jelben $A = B$.

A halmazok közti kapcsolatok jellemzésére bevezetünk két új fogalmat:

D: Az *A* halmaz *részhalmaza* a *B* halmaznak, ha *A* minden eleme eleme *B*-nek is; $A \subseteq B$. Az *A* halmaz *valódi részhalmaza* a *B* halmaznak, ha *A* minden eleme eleme *B*-nek is, de *B*-nek van olyan eleme, amely nem eleme *A*-nak; $A \subset B$.

A részhalmaz kapcsolatra igazak a következő tételek:

T: $A \subseteq A$.

T: Ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$.

T: Ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$. Ezt a tételt gyakran használjuk két halmaz egyenlőségének bizonyítására.

A halmazok között műveleteket definiálunk, a legfontosabbak:

D: *A egyesítése* (*uniója*) *B*-vel azon elemek halmaza, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei.

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

D: *A metszete B*-vel azon elemek halmaza, amelyek mindkét halmaznak elemei.

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

D: *A különbség B* azon elemek halmaza, amelyek elemei *A*-nak, de nem elemei *B*-nek.

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

D: *A szimmetrikus különbség B* azon elemek halmaza, amelyek vagy *A*-nak, vagy *B*-nek elemei.

$$A \Delta B := \{x | x \in A \vee x \in B \wedge x \notin A \cap B\}$$ vagy másképp $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

D: *A Descartes- vagy direktszorzata B*-vel azon rendezett számpárok halmaza, amelyek első tagja az *A* halmaz, második tagja a *B* halmaz eleme.

$$A x B := \{(a;b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

T: Az unió- és a metszetképzés idempotens, kommutatív, asszociatív és mindkettő disztributív a másikra nézve.

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$
$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

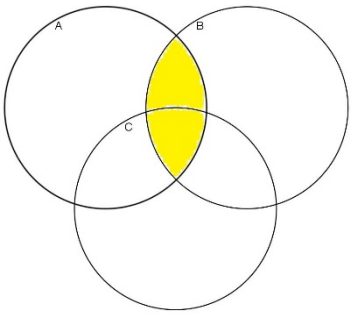
A halmazokra vonatkozó tételek bizonyítására, feladatok megoldására legtöbbször Venn-diagramot használunk. A következő tételt is ennek segítségével bizonyítom.

Tétel: Tetszőleges *A*, *B* és *C* halmazok esetén $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

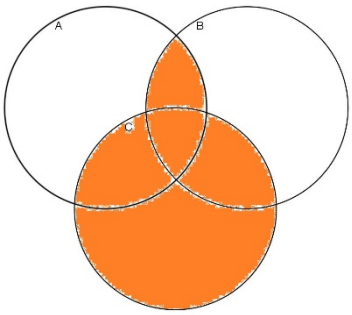
Bizonyítás: Ábrázoljuk az egyenlőség mindkét oldalát Venn-diagramon!

A bal oldal:

Előbb

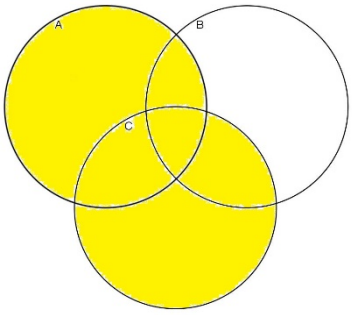


majd

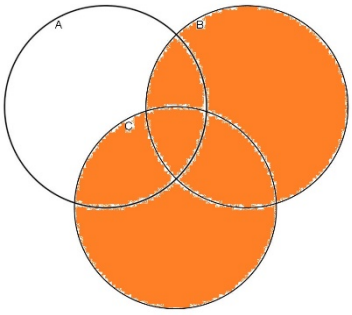


A jobb oldal:

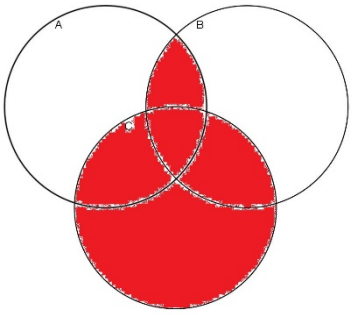
Előbb



majd



majd



A két utolsó rajzot összehasonlítva láthatjuk a két oldal egyezőségét.**//**

További fontos művelet a *komplementerképzés*.

Ennek meghatározásához értelmeznünk kell az ún. alaphalmazt vagy univerzumot.

D: Egy feladattal, problémával kapcsolatba hozható összes dolog alkotja a feladatra, problémára vonatkozó *alaphalmaz*t vagy *univerzum*ot. Általában *H*-val vagy *U*-val jelöljük.

D: Az *A* halmaz *H*-ra vonatkozó komplementerén értjük *H* azon elemeinek halmazát, amelyek nem elemei *A*-nak. Jele: $\overline{A}$. Nyilván $\overline{A} = H \setminus A$, továbbá $\overline{\overline{A}} = A$.

A komplementerképzésre vonatkozó két legfontosabb tételt az ún. De Morgan-azonosságok képviselik:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Fentiek alapján belátható a következő tétel: Bármely halmazokra vonatkozó műveletsor felírható (megfelelő zárójelezéssel) csak unió- és komplementerképzéssel, vagy csak metszet- és komplementerképzéssel.

Nevezetes ponthalmazok (mértani helyek)

D: Nevezetes ponthalmazokon általában az ún. *távolsággal jellemzett ponthalmazok*at értjük.

Például: Azon pontok halmaza a síkban, amelyek a sík egy adott pontjától adott távolságra vannak, a kör (körvonal). (Az adott pontot a kör középpontjának, az adott távolságot a kör sugarának nevezzük.)

Bár ez definíciónak látszik, mégsem az, hanem egy szükséges és elegendő feltételt megfogalmazó tétel. Talán e tulajdonság jobban kitűnik a következő nevezetes ponthalmaz meghatározásából:

T: Azon pontok halmaza a síkban, amelyek egyenlő távolságra vannak a sík két különböző pontjától, a két pontot összekötő szakasz szakaszfelező merőlegese.

Ugyanis *definíció szerint* a szakaszfelező merőleges az az egyenes, amely illeszkedik a szakasz felezőpontjára, és merőleges a szakaszra. Így a fenti megfogalmazás a következő két tételt foglalja magába:

1. A szakaszfelező merőleges minden pontja egyenlő távolságra van a szakasz két végpontjától.
2. Ha egy pont egyenlő távolságra van egy szakasz két végpontjától, akkor illeszkedik a szakasz szakaszfelező merőlegesére.

További nevezetes ponthalmazok:

T: Azon pontok halmaza a síkban, amelyek egyenlő távolságra vannak a sík két metsző egyenesétől, a két egyenes meghatározta négy szög két szögfelező egyenese.

T: Azon pontok halmaza a síkban, amelyek egyenlő távolságra vannak a sík két, egymással párhuzamos egyenesétől, a két egyenes távolságát felező, azokkal párhuzamos egyenes.

T: Azon pontok halmaza a síkban, amelyek egyenlő távolságra vannak a sík egy egyenesétől és egy arra nem illeszkedő ponttól, a parabola. (Az adott egyenes a parabola vezéregyenese (direktrixe), az adott pont a parabola fókuszpontja, az egyenes és a pont távolsága pedig a parabola paramétere.)

T: Azon pontok halmaza a síkban, amelyeknek a sík két (nem feltétlenül különböző) pontjától mért távolságainak összege a két pont távolságánál nagyobb, adott szakasz hosszával egyenlő, az ellipszis. (Az adott pontokat az ellipszis fókuszpontjainak nevezzük.)

T: Azon pontok halmaza a síkban, amelyeknek a sík két különböző pontjától mért távolságainak különbsége a két pont távolságánál kisebb, adott szakasz hosszával egyenlő, a hiperbola. (Az adott pontokat a hiperbola fókuszpontjainak nevezzük.)

Az utóbbi három mértani helyet (ideértve a kört is) kúpszeletnek nevezzük (lehetséges más geometriai meghatározásuk miatt).

A térben vizsgálva a fenti tételeket a következő analógiákat kapjuk:

- kör ↔ gömb;
- szakaszfelező merőleges ↔ szakaszfelező sík;
- szögfelező egyenes ↔ szögfelező sík;
- párhuzamos egyenes ↔ párhuzamos sík;
- parabola ↔ forgási paraboloid (pont és sík);
- ellipszis ↔ forgási ellipszoid;
- hiperbola ↔ forgási hiperboloid.

A térben további nevezetes ponthalmazokat is megfogalmazhatunk.

Alkalmazások:

A halmazokat a matematika minden területén használjuk, például függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek értelmezési tartományának meghatározásakor, az értékkészlet és a megoldáshalmaz vizsgálatakor, az informatikában és a statisztikában az adatbázisok felépítésében, és azok különböző lekérdezéseiben (Google, Yahoo stb.), elemzéseiben (népszámlálások, közvélemény-kutatások stb.).

A nevezetes ponthalmazok középiskolában jellemző felhasználása a geometriai szerkesztésekben és bizonyításokban történik (a szerkesztéseknél általában pontot szerkesztünk, két nevezetes ponthalmaz segítségével). További felhasználásuk történhet például a csillagászatban (kúpszeletek), vagy különböző számítógépes grafikák készítésében.

Megjegyzés:

Amennyiben a tételhez tartozó feladat a bizonyított tétel belátása lenne, javaslom helyette a De Morgan-azonosságok belátását.

2. tétel: Racionális és irracionális számok. Műveletek a racionális és irracionális számok halmazán. Közönséges törtek és tizedes törtek. Halmazok számossága.

Ebben a témakörben csak a valós számok halmazával és annak részhalmazaival foglalkozom. Megtartva a középiskolás felépítés – alapvetően történeti – megközelítésmódját, mégis törekszem az egzakt felépítésre. (*Bővebben erről az 1. számú kiegészítésben.*)

A továbbiakban *szám*on *valós szám*ot értek, amelyek halmazát a következőképpen határozom meg (Kosztolányi és mtsai, 2009, 29):

D: A *számegyenes* olyan egyenes, amelyen kijelölünk két pontot, az egyikhez a 0, a másikhoz az 1 valós számot rendeljük. A két pont távolságát *egység*nek nevezzük.

D: A számegyenes minden pontjához tartozik egy valós szám, és fordítva, minden valós számhoz tartozik egy pont a számegyenesen. (Azaz a valós számok halmaza és a számegyenes pontjai között létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.) A valós számok halmazának betűjele $\mathbb{R}$.

A korai ember az életben felmerült számlálási problémák megoldásában a nem üres halmazok elemszámának (darabszámának) meghatározására alkotta meg a számokat. Eredetileg ezeket neveztük természetes számoknak: az 1; 2; 3; … számolás eredményét (halmazát), újabban beleértjük a 0 számot is. A természetes számok halmazának betűjele $\mathbb{N}$.

Két műveletet értelmezett rajtuk: az *egyesítés*üket, ez lett az *összeadás*, illetve a *többszörözés*üket, ez lett a *szorzás*. Mindkét művelet *kommutatív* és *asszociatív*, a szorzás pedig *disztributív* az összeadásra nézve, de ez fordítva nem igaz, ezért nevezzük a szorzást *erősebb* műveletnek.

A természetes számok halmaza zárt az összeadásra és szorzásra nézve, azaz a művelet elvégzése nem vezet ki a halmazból, a művelet eredménye is természetes szám.

A két művelet *inverz művelet*e azonban nem mindig hajtható végre a természetes számok halmazán, ezért vált szükségessé (a permanenciaelv alkalmazásával) a *0* és a *negatív egész szám*ok (*kivonás*), illetve a racionális számok (*osztás* 0-tól különböző egésszel) értelmezése. Az egész számok halmazának betűjele $\mathbb{Z}$.

E négy műveletet egyben *alapművelet*nek nevezzük.

D: Azokat a számokat, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként, racionális számnak nevezzük. A racionális számok halmazának betűjele $\mathbb{Q}$.

D: Azokat a számokat, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, irracionális számoknak nevezzük. Az irracionális számok halmazának betűjele $\mathbb{Q}^*$.

Azokat az irracionális számokat, amelyek gyökei egy racionális együtthatójú polinomegyenletnek, *algebrai szám*oknak nevezzük (ilyen például a $\sqrt{2}$ vagy a $\frac{5\sqrt{3}}{7}$). Vannak olyan irracionális számok is, amelyek nem gyökei egyetlen racionális együtthatójú polinomegyenletnek sem, ezeket *transzcendens szám*oknak nevezzük (ilyen például a π vagy az e).

A két definícióból következően $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^* = \varnothing$ és $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^* = \mathbb{R}$.

A valós számtest axiomatikus felépítése alapján a racionális és irracionális számokat ezzel ekvivalens módon is tudjuk definiálni:

T: Minden valós számnak létezik egyértelműen meghatározott tizedes tört alakja.

D: Azokat a valós számokat, amelyek tizedes tört alakja véges vagy végtelen, szakaszos tizedes tört, racionális számoknak nevezzük.

D: Azokat a valós számokat, amelyek tizedes tört alakja végtelen, nem szakaszos tizedes tört, irracionális számoknak nevezzük.

T: Egy racionális szám tizedes tört alakja akkor és csak akkor véges, ha két egész szám tovább nem egyszerűsíthető hányadosaként felírt alakjában a nevező prímtényezős felbontásában csak a 2 és/vagy 5 prímszámok szerepelnek.

(*Megjegyzés: Analóg állítások igazak abban az esetben, ha a számrendszer alapjául nem a 10 számot választjuk.*)

Műveletek a racionális és irracionális számok halmazán

Mindkét halmazban az összeadás és a szorzás kommutatív és asszociatív, a szorzás (és az osztás) disztributív az összeadásra és a kivonásra nézve.

A racionális számok halmazának legfontosabb tulajdonságai (tételek):

(1) A racionális számok halmaza sem alulról, sem felülről *nem korlátos*.
(2) A racionális számok halmaza *zárt* a négy alapműveletre nézve.
(3) A racionális számok halmaza *sűrű*, azaz bármely két racionális szám között van további racionális szám. (*Ebből már következik, hogy bármely két racionális szám között végtelen sok racionális szám van.*)

Az irracionális számok halmazának legfontosabb tulajdonságai (tételek):

(1) Az irracionális számok halmaza sem alulról, sem felülről *nem korlátos*.
(2) Az irracionális számok halmaza *nem zárt* a négy alapműveletre nézve.
(3) Az irracionális számok halmaza *sűrű*, azaz bármely két irracionális szám között van további irracionális szám. (*Ebből már következik, hogy bármely két irracionális szám között végtelen sok irracionális szám van.*)

A racionális és az irracionális számok közti további fontosabb összefüggések (tételek):

(1) Bármely két racionális szám között van irracionális szám. (*Ebből már következik, hogy végtelen sok is van.*)
(2) Bármely két irracionális szám között van racionális szám. (*Ebből már következik, hogy végtelen sok is van.*)
(3) Egy racionális és egy irracionális számmal elvégzett alapművelet eredménye irracionális szám.

Törtek

A hétköznapi életben háromféle törtet használunk a valós számok felírására: *közönséges tört*, *vegyes tört* és *tizedes tört*.

Racionális számok esetén például: $\frac{22}{7}=3\frac{1}{7}=3,\dot{1}4285\dot{7}$ (a π irracionális szám Archimédesz által adott – az általánosan használt 3,14-nél jobb – közelítése). A szakaszos tizedes törtek jelölésében a szakaszt a kezdő- és végszámjegy fölé tett ponttal jelöljük (mint fentebb), a szakasz a nevezőnél legfeljebb eggyel rövidebb hosszú lehet.

Mivel a számok közti szorzásnál nem szoktuk (*nem kötelező*) kitenni a műveleti jelet, ezért a vegyes tört alakú felírást célszerű elkerülni, mert nehezen dönthető el, hogy $3\frac{1}{7}=\frac{22}{7}$ vagy $3\frac{1}{7}=3\cdot\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$, ennek eldöntésében csak a „*szövegkörnyezet*" segíthet, például

(1) $2x+8=3\frac{1}{7}$ $\quad D=\mathbb{R}$ egyenlet esetén vegyes tört;

(2) $\frac{2x+8}{3}=\frac{1}{7}$ $\quad D=\mathbb{R}$; $2x+8=3\frac{1}{7}$ egyenletmegoldás során $3\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$, azaz közönséges tört.

Halmazok számossága

Egy halmazban vagy véges sok, vagy végtelen sok elem található.

D: Véges sok elemet tartalmazó *A* halmaz számosságán az *A* halmazt alkotó elemek darabszámát értjük, jele $|A|$.

Véges halmaz számossága tehát egy természetes szám, a 0 az üres halmaz elemszáma.

Végtelen sok elemet tartalmazó halmaz esetén a halmaz számosságát hasonló módon jelöljük, például $|\mathbb{N}|$, ez nyilván nem egy természetes szám, a fogalmát más módon kell meghatározni, ehhez függvénytani segítséget hívunk:

D: Az *A* és *B* halmazok *egyenlő számosságúak* (más néven *ekvivalensek*), ha létezik olyan *f* függvény, amelyre $f:A\to B$ kölcsönösen egyértelmű és ráképezés (*bijektív*, azaz *A* minden eleméhez *B* pontosan egy eleme tartozik és fordítva, illetve $R_f = B$).

Halmazok ekvivalenciáját többféle módon jelölhetjük, én a $\rightleftarrows$ jelet fogom használni (Schultz és Tarcsay, 2013). *Az ekvivalencia nem reláció, mert ehhez léteznie kellene a halmazok halmazának*.

T: Legyenek *A*, *B* és *C* tetszőleges halmazok. Ekkor

(1) $A\rightleftarrows A$;
(2) Ha $A\rightleftarrows B$, akkor $B\rightleftarrows A$.
(3) Ha $A\rightleftarrows B$ és $B\rightleftarrows C$, akkor $A\rightleftarrows C$.

Az ekvivalencia segítségével tudjuk valójában definiálni a végtelen és a véges halmaz fogalmát:

D: Az *A* halmaz végtelen, ha van olyan $B\subset A$, amelyre $A\rightleftarrows B$.

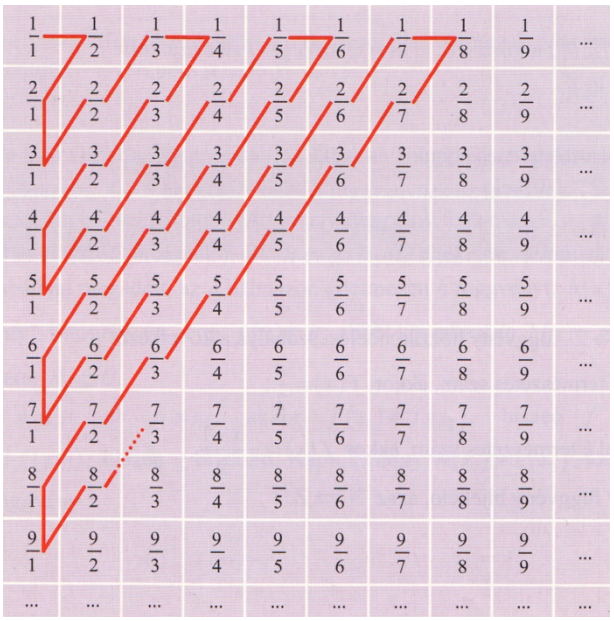
D: Az *A* halmaz véges, ha nem végtelen. (*Ez ekvivalens a korábban adott meghatározással.*)

Nyilvánvaló, hogy $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $\{1;2;...;n\} \not\rightleftarrows \mathbb{Z}^+$, a $|\mathbb{Z}^+|$ számosságot *megszámlálhatóan végtelen számosság*nak nevezzük, jele $\aleph_0$ („alef null”, az *alef* a héber ábécé első betűje). A *megszámlálhatóan végtelen* és a *véges* halmazokat együtt *megszámlálható* halmazoknak nevezzük.

Tétel: $|\mathbb{Z}^+| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}^+| = |\mathbb{Q}|$

Bizonyítás: A fent megadott tételek közül a $|\mathbb{Z}^+| = |\mathbb{Q}^+|$ tételt fogom bizonyítani a Cantor-féle átlós módszer segítségével (Schultz és Tarcsay, 2013, 378).

Írjuk föl egy táblázatba egymás alá az 1, a 2, a 3 stb. nevezőjű törteket. Így felírjuk az összes pozitív racionális számot, mindegyiket többször is (a bővített alakok miatt). A piros vonal segítségével berajzoltunk egy „bejárási útvonalat”.



Megadunk egy $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Q}^+$ függvényt a következő módon: $1 \mapsto \frac{1}{1}$, $2 \mapsto \frac{1}{2}$, $3 \mapsto \frac{2}{1}$, $4 \mapsto \frac{3}{1}$, $5 \mapsto \frac{1}{3}$ (*azt a törtet, amelynek értéke korábban már szerepelt, kihagyjuk*), és így tovább. Így minden pozitív egész számhoz hozzárendeltünk egy pozitív racionális számot, és fordítva, tehát *f* bijekció, azaz $\mathbb{Z}^+ \rightleftarrows \mathbb{Q}^+$. **//**

A számosságok között is tudunk < *relációt* definiálni.

D: $|A| < |B|$, ha $\exists B^* \subset B$, hogy $A \rightleftarrows B^*$, de $A \not\rightleftarrows B$.

D: Az *A* halmaz *hatványhalmaz*ának nevezzük az *A* halmaz összes részhalmazából álló halmazt, jele H_A.

T: $|A| < |H_A|$.

T: Ha $|A| = n$, nemnegatív egész, akkor $|H_A| = 2^n$.

T: Bármely számosságnál van nagyobb számosság.

T: A valós számok halmaza nem megszámlálható.

D: A valós számok halmazának számosságát *kontinuum számosság*nak nevezzük, jele *c*, a gót kis cé.

T: (1) $|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|$

(2) $c > \aleph_0$

(3) $|\mathbb{R}| = |\mathbb{Q}^*| = |]0;1[| = |\{\text{az } n\text{-dimenziós terek pontjai}\}|$

A *II. Nemzetközi Matematikai Kongresszus* 1900. augusztus 6–12. között ülésezett Párizsban. *David Hilbert*, a világ akkor már elismerten egyik legnagyobb matematikusa augusztus 8-án *Matematikai*

problémák címmel tartott később óriási jelentőségre szert tevő előadást, amelyben felsorolta a matematika szerinte legfontosabb problémáit. Ezek között első helyen említette a *Cantor-féle kontinuumhipotézis*t: *nincs számosság a megszámlálhatóan végtelen és a kontinuum számosság között*. *Kurt Gödel* 1940-ben bebizonyította, hogy a kontinuumhipotézis *nem cáfolható* a halmazelmélet axiomatikus felépítésben, míg *Paul Cohen* 1963-ban belátta, hogy *nem is bizonyítható*. A kettő együtt azt jelenti, hogy *az állítás konzisztens* és *független*, vagyis sem az állítás elfogadása, sem az állítás tagadásának elfogadása nem okoz ellentmondást, összhangban a *Gödel-féle nemteljességi tétel*lel.

Alkalmazások

A matematika, de a hétköznapi élet minden területén is használjuk a számokat – elsősorban az egészeket és a (*kerekített*) tizedes törteket –, továbbá a rajtuk értelmezett műveleteket. Tizedes törtek használata esetén különös figyelmet kell fordítanunk a *közelítő számítások hibái*ra, hogy a megkívánt pontosságú eredményeket kapjuk. Középiskolában a számításokat *szükséges és elegendő négy értékes jegy pontosság*gal végezni.

Megjegyzés:

Magának a *végtelen*nek (és *nem a végtelen számosság*oknak!) a jelölésére John Wallis, 17. századi angol matematikus vezette be a ∞ jelet, amelyet a mai napig használunk különböző jelölésekben, például: $[3;\infty[$; $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}$; $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ stb.

3. tétel: Oszthatóság, oszthatósági szabályok és tételek. Prímszámok. Számrendszerek.

A számelmélet elsősorban a pozitív egész számok tulajdonságait kutatja. Az elmélet azonban nem csak az egész számokat használja, ugyanis jó néhány tétele a valós vagy komplex számok tulajdonságainak felhasználásával bizonyítható a legkönnyebben. Ugyanakkor a természetes számok jól használhatók a valós számok vizsgálatára (például a $\sqrt{2}$ irracionális voltának bizonyítására).

A következőkben a betűk – ha csak mást nem mondunk – egész számokat jelentenek.

D: Azt mondjuk, hogy a *b* szám osztható a nem nulla *a* számmal, ha van olyan *c* szám, amelyre *b* = *ca*.

Jelölése: $a|b$, a nem osztója jelölése $a\nmid b$.

A definíció segítségével könnyen bizonyíthatók az alábbi tételek:

T:

(1) Ha $a|b$, akkor $a|cb$.

(2) Ha $a|b$ és $b|c$, akkor $a|c$.

(3) Ha $a|b$ és $a|c$, akkor $a|db+ec$.

(4) Ha $a|b$ és $b|a$, akkor $a=\pm b$.

(5) Ha $a|b$ és $a > 0$, $b > 0$, akkor $a \le b$.

(6) Ha $m \ne 0$, akkor $a|b \Leftrightarrow ma|mb$.

A következőkben a feladatok megoldásában az egyik leggyakrabban használt tételt mondom ki.

T: (*A maradékos osztás tétele*.) Tetszőleges *a* > 0 és *b* számokhoz létezik olyan egyértelműen meghatározott *q* és *m* szám, amelyekre *b* = *qa* + *m*, ahol $0 \le m < a$. Ha $a\nmid b$, akkor *m* kielégíti az erősebb $0 < m < a$ egyenlőtlenséget is. *q*-t hányadosnak, *m*-et maradéknak nevezzük.

E tétel alkalmazásánál a szorzás *sorrend*jére figyelni kell, mert a $13 = 3 \cdot 4 + 1$ és a $13 = 4 \cdot 3 + 1$ felírás *nem ugyanaz*t jelenti.

D: Az *a* számot a *b* és a *c* szám közös osztójának nevezzük, ha $a|b$ és $a|c$.

T: Ha *b* és *c* egyike sem nulla, akkor mindkét számnak véges sok osztója van, így a közös osztók száma is véges, tehát van köztük legnagyobb. Jele: $(b;c)$ (*legnagyobb közös osztó* = *lnko*).

A tételből az is következik, hogy pozitív számok esetén $(b;c) \ge 1$.

D: Ha $(b;c) = 1$, akkor *b*-t és *c*-t *relatív prím*eknek nevezzük.

D: Ha $a|b$ és $c|b$, akkor a *b* számot az *a* és a *c* szám közös többszörösének nevezzük.

T: A közös többszörösök között van legkisebb (*legkisebb közös többszörös*, *lkkt*).

Az *lkkt* jelölése: $[a;c]$.

Több szám legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét, hasonló módon definiáljuk, illetve jelöljük.

T: Pozitív *a* és *b* számok esetén $(a;b)\cdot[a;b]=ab$.

E tétel csak két szám esetén érvényes, gyakran használjuk az $[a;b]$ meghatározására akkor, ha *a* és *b* *elég nagy*ok, ekkor $(a;b)$-t maradékos osztással gyorsabb kiszámítani.

Oszthatósági szabályok a tízes számrendszerben

Feladatok megoldása során gyakran használjuk a következő oszthatósági szabályokat (tételeket):

T:

(1) Egy szám akkor és csak akkor osztható 2-vel, ha utolsó számjegye osztható 2-vel.
(2) Egy szám akkor és csak akkor osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal.
(3) Egy szám akkor és csak akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két számjegyéből álló szám osztható 4-gyel.
(4) Egy szám akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha utolsó számjegye 0 vagy 5.
(5) Egy szám akkor és csak akkor osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal.
(6) Egy szám akkor és csak akkor osztható 7-tel, ha számjegyeit hátulról hármasával csoportosítva és váltakozó előjellel összeadva a kapott szám osztható 7-tel.
(7) Egy szám akkor és csak akkor osztható 8-cal, ha az utolsó három számjegyéből álló szám osztható 8-cal.
(8) Egy szám akkor és csak akkor osztható 9-cel, ha számjegyeinek összege osztható 9-cel.
(9) Egy szám akkor és csak akkor osztható 10-zel, ha utolsó számjegye 0.
(10) Egy szám akkor és csak akkor osztható 11-gyel, ha számjegyeit váltakozó előjellel összeadva a kapott összeg osztható 11-gyel.

Prímszámok

D: A $p > 1$ egész számot *prímszám*nak (*törzsszám*nak vagy röviden *prím*nek) nevezzük, ha *p*-nek nincs olyan *d* osztója, amelyre $1 < d < p$. Ha az $a \neq 1$ egész szám nem prím, akkor *összetett szám*nak nevezzük. A 0 se nem prím, se nem összetett szám.

Két ehhez kapcsolódó fontos tétel:

T: Minden $n > 1$ egész szám felírható prímek szorzataként (lehetséges, hogy a szorzat csak egytényezős).

T: Bármely $n > 1$ egész szám felbontása prímek szorzatára egyértelmű, eltekintve a prímek sorrendjétől (*a számelmélet alaptétele*).

A számelmélet alaptételének alkalmazásakor gyakran írjuk föl a számot ún. *kanonikus alak*ban:

$$n = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}\ .$$

További tételek a prímszámokról:

Tétel: A prímszámok száma végtelen (*Eukleidész*).

Bizonyítás: Indirekt úton bizonyítunk, azaz tegyük föl, hogy csak véges sok prím van: $p_1; p_2; p_3; \ldots; p_k$. Tekintsük az $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$ számot! A maradékos osztás tétele miatt *n*-et bármely fenti prímmel maradékosan osztva 1-et kapunk maradékul, tehát *n* egyetlen prímmel sem osztható. Ebből következik, hogy *n* vagy prím, vagy van olyan *p* prímosztója, amely különbözik a $p_1; p_2; p_3; \ldots; p_k$ prímektől. Mindkét lehetőség ellentmond feltevésünknek. **//**

Tétel: A prímek sorozatában tetszőlegesen nagy hézag van, azaz tetszőleges *k* pozitív egész számhoz létezik *k* egymás utáni összetett szám.

Bizonyítás: Tekintsük a következő számokat:

$$(k+1)!+2;\ (k+1)!+3;\ \ldots;(k+1)!+k;\ (k+1)!+k+1.$$

Mindegyik szám összetett, mivel *j* osztója a $(k+1)!+j$ egésznek, ha $2 \le j \le k+1$.

Ez utóbbi tétel azt sejteti, hogy *a prímek elég egyenlőtlenül oszlanak el*. A számelmélet egyik legmeglepőbb eredménye (*prímszámtétel*) szerint azonban ha $\pi(n)$-nel jelöljük az *n*-nél kisebb prímek számát, akkor $\lim_{n\to\infty} \pi(n)\frac{\ln n}{n} = 1$, azaz nagy *n*-ek esetén az *n*-nél kisebb prímek száma *fordítottan arányos* az $\frac{n}{\ln n}$ hányadossal.

Tétel: Az *n* > 1, $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ egész szám pozitív osztóinak száma

$$d(n) = (\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot(\alpha_3+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1).$$

Bizonyítás: Legyen $r|n$. Emiatt $n = q \cdot r$. Vessük ezt össze *n* kanonikus alakjával!

$$n = q \cdot r = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

amelyből a számelmélet alaptétele szerint az következik, hogy *r* kanonikus alakjában is csak a p_i prímek fordulhatnak elő, legfeljebb az α_i-edik hatványon, $1 \le i \le k$. *És fordítva*: minden $r = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$ alakú szám – ahol $0 \le \beta_i \le \alpha_i$ és $1 \le i \le k$ – osztója lesz *n*-nek.

Ahhoz, hogy *n* összes pozitív osztóit megkapjuk, a β_i kitevőket egymástól függetlenül, (α_i+1)-féleképpen választhatjuk meg, ezért $d(n) = (\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot(\alpha_3+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)$. **//**

A prímszámok segítségével általában könnyen meg tudjuk határozni két vagy több szám *lnko*-ját és *lkkt*-jét.

T: Két vagy több szám legnagyobb közös osztója a számok kanonikus alakjában szereplő *közös prímtényezők legkisebb hatványon* vett szorzata.

T: Két vagy több szám legkisebb közös többszöröse a számok kanonikus alakjában szereplő *összes prímtényező legnagyobb hatványon* vett szorzata.

Nagy számok esetén a kanonikus alak meghatározása (az *akasztófamódszer*rel) nehéz és hosszadalmas eljárás lehet, ilyenkor két szám lkkt-jét úgy számoljuk ki, hogy előbb lnko-jukat határozzuk meg

*maradékos osztások sorozatá*val, majd az $(a;b)\cdot[a;b]=ab$ tétel alapján számoljuk ki lkkt-jüket. Például $[2\,634\,420;219\,618]$ esetén:

$$2\,634\,420=11\cdot 219\,618+218\,622$$
$$219\,618=1\cdot 218\,622+996$$
$$218\,622=219\cdot 996+498$$
$$996=2\cdot 498$$

A két szám legnagyobb közös osztója az utolsó nem nulla maradék, tehát $(2\,634\,420;219\,618)=498$, ahonnan $[2\,634\,420;219\,618]=\dfrac{2\,634\,420\cdot 219\,618}{498}=1\,161\,779\,220$. (*E módszer másik előnye, hogy könnyen tudunk rá rövid számítógépes programot írni, ciklus alkalmazásával.*)

Több szám lnko-jának meghatározásához kettesével szoktunk bontani, és az lnko-k lnko-ját keressük.

Számrendszerek

A kezdetekben a számokat betűkkel jelölték (föníciai, ógörög, héber vagy római számok), de az ezekkel való számolás igen nehézkes volt, nagy előrelépést jelentett a ma használatos helyi értékes írásmód bevezetése (maja kultúra, India), amely jelentősen megkönnyítette az alapműveletek elvégzését.

A történelem folyamán többféle számrendszert is használtak az emberek a hétköznapi számolások során attól függően, hogy mit tekintettek elsődleges segítségnek/célnak. Így a *tízes*t és *húszas*t (a kezeken, illetve a kezeken és lábakon lévő ujjak száma miatt), vagy a *tizenkettes*t és a *hatvanas*t (a több részre való könnyű oszthatóság miatt). Az informatika fejlődése miatt került előtérbe a *kettes (bináris)* és a *tizenhatos (hexadecimális)* számrendszer.

A hatvanas számrendszer emlékét őrzi a fok-perc-másodperc beosztás, a tizenkettesét az angolszász nyelvekben a 11 és 12 számjegyek önálló neve (valamint az Egyesült Királyságban 1971-ig az 1 font = 20 shilling, 1 shilling = 12 penny átváltás a fizetőeszközöknél). A magyar nyelv is őrzi a valamikori tizenkettes számrendszert a *tucat* (12) és a *nagytucat* (= tucat tucat, 144) (szám)nevekben.

Tizenkettes számrendszerben egyébként könnyű az ujjainkon számolni, a mutató-, a középső, a gyűrűs- és a kisujjunk 3-3 percét használva. Minden bizonnyal a fizetéssel kapcsolatban gesztussá vált mozdulat – a hüvelyk-, a mutató-, és középső ujjak hegyének összedörzsölése – is erre vezethető vissza.

A számok helyi értékes felírásakor az *n*-es számrendszerben, a számjegyek halmaza {0; 1; 2; … ; *n*-1}. Jobbról az első helyre kerülnek az egyesek, majd balra haladva a számjegy értékei: n; n^2; n^3; … lesznek a helyi értékek. Ezekkel a számokkal szorozva adódnak a számjegyek valódi értékei. A helyi értékes számírási rendszerekben alapvető a 0 számjegy használata, hiszen ez teszi lehetővé, hogy kimaradjon egy nagyságrend. Jelölése: $\overline{abcde}^{\,n}$ vagy $abcde_n$, ahol $abcde_n=e\cdot 1+d\cdot n+c\cdot n^2+b\cdot n^3+a\cdot n^4$.

Az alapprobléma ebben a tárgykörben a különböző számírások, számrendszerek egymásba való átírása.

Tekintsük az *MMXVII* római számot. Ennek értéke tízes számrendszerben 2017. Ezt más alapú számrendszerbe maradékos osztással tudjuk átírni, például nyolcasba:

$$\left.\begin{array}{l}2017=252\cdot 8+1\\252=31\cdot 8+4\\31=3\cdot 8+7\\3=0\cdot 8+3\\0=0\cdot 8\end{array}\right\}\Rightarrow 2017=3741_8$$

Ha például 5-ös számrendszerből kell átírni 7-esbe, akkor érdemesebb (a megszokott 10-es alapú számolásunk miatt) előbb átírni 10-esbe, majd onnan 7-esbe.

A számítástechnikában használt 2-es, 8-as és 16-os számrendszerek között könnyű az átváltás: a 2-esben felírt számot hátulról csoportosítjuk hármasával, illetve négyesével, és a csoportokat írjuk át számjegyekké, majd ezeket egymás mellé. A kettesbe való átírásnál ennek az eljárásnak a fordítottját használjuk:

$3741_8 = 11\,111\,100\,001_2$, mert $1_8 = 001_2$; $4_8 = 100_2$; $7_8 = 111_2$; $3_8 = 011_2$, illetve

$11111100001_2 = 111\,1110\,0001_2 = 7(13)1_{16}$, mert $111_2 = 7_{16}$; $1110_2 = (13)_{16}$; $0001_2 = 1_{16}$.

A hexadecimális számrendszerben a 9-esnél nagyobb számjegyek jelölésére rendre az *A*; *B*; *C*; *D*; *E*; *F* betűket használjuk, így a pontos leírás: $MMXVII = 2017 = 11\,111\,100\,001_2 = 3741_8 = 7D1_{16}$.

Azt, hogy egy szám hexadecimális, gyakran egy eléje tett $ vagy # jellel jelölik: $7D1_{16} = \$7D1 = \#7D1$.

Alkalmazások

A prímszámokat az alapvető számolásokban a törtek egyszerűsítésénél és összeadásánál használjuk az lnko és az lkkt meghatározásához.

Az egész számok halmazán értelmezett, ún. diofantoszi egyenleteket, problémákat legtöbbször oszthatósággal, maradékos osztás segítségével oldjuk meg.

Hexadecimális számrendszerrel a ma embere legtöbbször a mobiltelefonján, számítógépén találkozik, sőt használnia is kell: a különböző eszközök közötti információátadást biztosító hálózati kártyák mindegyike rendelkezik egyedi, ún. MAC-címmel, amellyel a hálózat azonosítja az eszközt. Ezt meg kell adni a legtöbb esetben, például egy WiFi elérést biztosító routernek, hogy felengedjen a hálózatra. Alakja: négy hexadecimális szám, kötőjelekkel elválasztva.

És még hosszasan lehetne sorolni…

Megjegyzés:

Ez a tétel kicsit hosszabb lett annál, mint ami 15 percbe belefér. Ennek két oka van:

1) *Mióta az eszemet tudom, a számelmélet a kedvenc témaköröm a matematikán belül, ebből írtam annak idején a szakdolgozatom is (második helyen az analízis…).*
2) *Itt három tételt is bizonyítottam:*
   (a) *végtelen sok prím van (Eukleidész) – a vizsgázók általában ezt választják, csak sajnos ez a túl könnyű és túl rövid kategória;*
   (b) *tetszőlegesen nagy hézag van a prímek között – ez szintén az előző kategóriába tartozik;*
   (c) *a pozitív osztók száma – én ezt ajánlom, mert ez már valamivel erősebb az előző kettőnél.*

A választás Önökre van bízva… ☺

4. tétel: A matematikai logika elemei. Logikai műveletek. Állítás és megfordítása, szükséges és elégséges feltételek, bemutatásuk tételek megfogalmazásában és bizonyításában.

A logika története

A logika valójában nem (csak) a matematika mint tudomány része, hanem az emberi gondolkodás legfontosabb törvényeit, a helyes következtetések szabályait fogalmazza meg, valamikor önálló tárgyként is tanították.

Alapjait Szókratész és követői, a szofisták rakták le (akik a szavak és a mondatok jelentését próbálták meg tisztázni), majd Arisztotelész dolgozta ki részletesen a máig használt szabályokat, melyeket halála után közel háromszáz évvel *Organon* (Eszköz) néven foglaltak össze. A feladatmegoldásokban a mai napig használjuk jelölésmódját:

premisszák	$\begin{cases} \textit{Minden ember halandó.} \\ \textit{Szókratész ember.} \end{cases}$	$v = 20\,km/h$ $t = 15\,perc$
konklúzió	*Szókratész halandó.*	$s = ?$

A logika fejlődése a 19. század végén, Gottlob Frege munkásságával indult csak újra, a 20. században pedig többek között Bertrand Russell, Ludwig Wittgenstein, Alfred Tarski és Kurt Gödel formálták tovább. A matematika szempontjából különösen Russell és Gödel munkássága fontos: előbbi Alfred North Whiteheaddel közösen írt *A matematika alapjai* című művében a matematika axiomatikus megalapozására tett kísérletet, míg Gödel nemteljességi tétele épp az axiomatikus felépítés egyik fontos tulajdonságát mondja ki: minden ellentmondásmentes axiómarendszer, amely tartalmazza a természetes számok axiómarendszerét, nem teljes, azaz *vannak benne eldönthetetlen problémák* (mint például Eukleidész nevezetes párhuzamossági axiómája).

A matematikai logika

A logika alapfeladata, hogy olyan formai kritériumokat tárjon fel, amelyek szerint az adott igaz vagy igaznak feltételezett állítások (azaz a premisszák) esetén helyesen következtethetünk egy kijelentés (a konklúzió) igazságára. A logika legegyszerűbb ága az *ítéletkalkulus*, amelynek alapfogalmai az *ítélet* (állítás), a *logikai értékek* (*i*; *h*), és egy, az ítéletek halmazán értelmezett *függvény*, amelynek képhalmaza a logikai értékek halmaza, amely minden ítélethez egyértelmű módon rendel egy logikai értéket.

D: Ítéletnek (állításnak, kijelentésnek) nevezünk minden olyan kijelentő mondatot, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis.

Ha az állításokat tagadószóval látjuk el vagy kötőszavakkal kapcsoljuk össze, akkor *logikai művelet*et kapunk, amelyeket *igazságtáblázat*tal adunk meg.

A következőkben a logika alapműveleteit definiáljuk igazságtáblázattal:

1. *Negáció* (*tagadás*, „*nem A*”, jele $\neg$)

A	$\neg A$
i	h
h	i

Nyilván $\neg(\neg A) = A$.

2. *Konjunkció* (*„A és B”*, jele $\wedge$)

A	*B*	$A \wedge B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

Csak akkor igaz, ha mindkét tagja igaz.

3. *Diszjunkció* (*„A vagy B”*, *megengedő vagy*, jele $\vee$)

A	*B*	$A \vee B$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Csak akkor hamis, ha mindkét tagja hamis.

4. *Implikáció* (*következik*, *„ha A*, *akkor B”*, jele $\Rightarrow$)

A	*B*	$A \Rightarrow B$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

Csak akkor hamis, ha előtagja igaz, utótagja hamis (igaz állításból nem következhet hamis állítás).

5. *Ekvivalencia* (*egyenértékűség*, *„akkor és csak akkor A*, *ha B”*, jele $\Leftrightarrow$)

A	*B*	$A \Leftrightarrow B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

Akkor és csak akkor igaz, ha elő- és utótagja azonos logikai értékű.

A mindennapi beszédben gyakran használjuk a *vagy* szót *kizáró vagy* (*csak az egyik*) értelemben, de ezt könnyű észrevenni: ilyenkor mindig a *„vagy …, vagy …”* szókapcsolatot használjuk.

Az állításokban gyakran használunk *kvantor*okat.

A kvantifikáció (Arisztotelész) lényege a következő.

A „… halandó.” nyitott mondatból nem csak úgy kaphatunk zárt mondatot (ítéletet), hogy egy nevet helyettesítünk a kitöltetlen helyre: „Szókratész halandó”.

Ítéletet kapunk úgy is, ha a nyitott mondatot záró alanyok számára teszünk valamilyen állítást:

„Minden ember halandó.” (univerzális kvantifikáció),

„Van olyan (létezik) ember, aki halandó.” (egzisztenciális kvantifikáció),

„Ezer olyan ember van, aki halandó.” (numerikus kvantifikáció).

Ezek jelölésére használjuk az *univerzális kvantor*t ($\forall$, a *„minden, bármely, összes, valamennyi”* kifejezésére), az *egzisztenciális kvantor*t ($\exists$, a *„van olyan, létezik”* kifejezésére), ez utóbbi speciális esete a $\exists!$, amellyel a *„pontosan egy létezik”* kifejezést jelöljük.

Ezekkel a jelölésekkel majd az egyetemi tanulmányaik során sűrűn fognak találkozni a különböző matematikakönyvekben és -jegyzetekben.

A logikai műveletek tulajdonságai

A *tagadás* jó használata rendkívül fontos a matematikában, de a hétköznapi életben is. Például a *„Minden embernek két feje van.”* állítást tagadhatjuk egészében (az állítmányában) – *„Nincs minden embernek két feje.”*, de kibontva is: *„Van olyan ember, akinek nincs két feje.”* A klasszikus rossz tagadás a *„Minden embernek egy feje van.”* állítás.

Igazságtáblázattal könnyen belátható, hogy

a) $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$;
b) $A \Rightarrow B = (\neg A) \vee B$;

ezért elegendő az *és* és a *vagy* műveleteket vizsgálni.

Tétel: A konjunkció és a diszjunkció idempotens, kommutatív, asszociatív és disztributív a másikra nézve.

(1)	$A \wedge A = A$	(2)	$A \vee A = A$
(3)	$A \wedge B = B \wedge A$	(4)	$A \vee B = B \vee A$
(5)	$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$	(6)	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$
(7)	$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$	(8)	$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

Bizonyítás: Csak a (7) azonosságot bizonyítom ítéletkalkulus segítségével.

A	B	C	$(A \vee B)$	$(A \vee B) \wedge C$	$(A \wedge C)$	$(B \wedge C)$	$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
i	i	i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	h	h	h	h
i	h	i	i	i	i	h	i
i	h	h	i	h	h	h	h
h	i	i	i	i	h	i	i
h	i	h	i	h	h	h	h
h	h	i	h	h	h	h	h
h	h	h	h	h	h	h	h

Mivel a két oldal által adott eredmények minden lehetséges esetre megegyeznek, ezért (7) valóban azonosság.**//**

További fontos összefüggés a két De Morgan-azonosság:

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B} \text{ és } \overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}.$$

A következőkben **állítások**kal **és megfordításuk**kal foglalkozom.

A matematikai tételek (állítások) legtöbbje *„ha A, akkor B”* típusú, azaz implikáció. Ennek megfordításán a *„ha B, akkor A”* állítást értjük. Abból, hogy egy $A \Rightarrow B$ állítás igaz, általában nem következik, hogy a $B \Rightarrow A$ állítás is igaz lenne.

Ha az $A \Rightarrow B$ állítás igaz, akkor azt mondjuk, hogy *A* elégséges (de nem feltétlen szükséges) feltétele *B*-nek, illetve *B* szükséges (de nem feltétlenül elégséges) feltétele *A*-nak.

Tekintsük a következő igaz állítást: *„Ha egy négyszög paralelogramma, akkor a négyszög trapéz.”* A négyszög *paralelogrammasága* elégséges feltétel ahhoz, hogy trapéz legyen (de nem szükséges), és

szükséges (de nem elégséges) feltétel a négyszög paralelogrammaságához, hogy trapéz legyen. A fenti állítás megfordítása („*Ha egy négyszög trapéz, akkor a négyszög paralelogramma.*”) nyilván hamis.

Ha az $A \Leftrightarrow B$ állítás („*A akkor és csak akkor, ha B*”) igaz, akkor azt mondjuk, hogy *A* szükséges és elegendő feltétele *B*-nek (és fordítva).

Az „*Egy egész szám akkor és csak akkor osztható 12-vel, ha osztható 3-mal és 4-gyel.*” igaz állításban a 3-mal és 4-gyel való oszthatóság szükséges és elégséges feltétel is ahhoz, hogy a szám osztható legyen 12-vel.

Tételek direkt bizonyításában azt használjuk ki, hogy az implikáció *tranzitív*, azaz *ha* $A \Rightarrow B$ *és* $B \Rightarrow C$, *akkor* $A \Rightarrow C$, másképp: $\left(\left(A \Rightarrow B\right) \wedge \left(B \Rightarrow C\right)\right) \Rightarrow \left(A \Rightarrow C\right)$.

Az indirekt (*reductio ad absurdum* típusú) bizonyítások esetében pedig azt használjuk ki, hogy $A \Rightarrow B = \neg A \vee B = B \vee \neg A = \neg\left(\neg B\right) \vee \neg A = \neg B \Rightarrow \neg A$, azaz ha *B* nem igaz, akkor *A* sem.

5. tétel: Hatványozás, a hatványfogalom kiterjesztése, a hatványozás azonosságai. Az *n*-edik gyök fogalma. A négyzetgyök azonosságai. Hatványfüggvények és a négyzetgyökfüggvény.

A hatványozás kétváltozós művelet, amelyet eredetileg egy olyan szorzat rövid leírására használtak, amelynek tényezői megegyeznek:

D: $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$ esetén $a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ darab}$, ahol a a hatvány alapja, n a hatvány kitevője és a^n a hatvány értéke.

A hatványozásra igazak a következő azonosságok:

T:
$$\begin{cases} (1) & a^n \cdot a^m = a^{n+m} \\ (2) & \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad a \neq 0,\ n \geq m+2 \\ (3) & a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \\ (4) & \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n \qquad b \neq 0 \\ (5) & \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \end{cases}$$

Ahhoz, hogy a (2) azonosság *bármely* két egész kitevőre teljesüljön, definiálnunk kell a 0, 1 és negatív egész kitevőjű hatványokat is. A definíciónak ki kell elégítenie azt a feltételt, hogy az azonosságok továbbra is érvényben maradjanak – ezt nevezzük *permanenciaelv*nek.

Az ennek eleget tevő definíciók a következők:

D: $a^1 := a$, $\quad a^0 := 1$, ha $a \neq 0$ és $n \in \mathbb{Z}^-$ esetén $a^n := \dfrac{1}{a^{-n}}$, $a \neq 0$.

(*A 0^0-t nem lehet ellentmondásmentesen értelmezni, a 0 minden pozitív egész kitevőjű hatvány 0, így kézenfekvő lenne ez a definíció, de bizonyos esetekben célszerű (és szokás) az 1 értéket adni neki, például:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^n$$

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^i \cdot x^{n-i}$$

Itt x = 0 esetén az x^0 =1 értékkel számolunk.)

A permanenciaelv alapján tudjuk kiterjeszteni a hatványozás fogalmát racionális kitevőre, ehhez az (5) azonosságot használjuk fel. Az egyértelműség miatt negatív számok racionális kitevőjű hatványait nem értelmezzük, a 0-nak pedig csak a pozitív racionális kitevőjű hatványait értelmezzük, ezek értéke 0.

D: $\forall a \in \mathbb{R}^+, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ esetén $a^{\frac{p}{q}}$ legyen az a pozitív valós szám, amelynek q-adik hatványa a^p.

E definíció esetén érvényben maradnak a hatványozás azonosságai racionális kitevőre is. Az *n*-edik gyök definíciója és azonosságai után az (1)-et bizonyítani is fogom.

Pozitív valós számoknak tudjuk értelmezni az *irracionális kitevőjű* hatványait is a következő tételek alapján:

T: Ha $a > 1$ valós szám és $r_1 < r_2$ racionális számok, akkor $a^{r_1} < a^{r_2}$, ha pedig $0 < a < 1$ valós szám, akkor $a^{r_1} > a^{r_2}$.

(*Ez a tétel azt mondja ki, hogy az* $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}\ x\mapsto a^x,\ a\neq 1$ *exponenciális függvény szigorúan monoton.*)

T: Ha $a > 1$ valós szám, akkor tetszőleges x valós számra $\sup\left\{a^r : r\in\mathbb{Q},\ r<x\right\} = \inf\left\{a^s : s\in\mathbb{Q},\ x<s\right\}$. Ha $0 < a < 1$ valós szám, akkor $\inf\left\{a^r : r\in\mathbb{Q},\ r<x\right\} = \sup\left\{a^s : s\in\mathbb{Q},\ x<s\right\}$.

(*Ez a tétel a teljességi axiómán alapul – minden felülről korlátos és nem üres halmaznak van legkisebb felső korlátja.*)

D: Ha $a > 1$ valós szám, akkor tetszőleges x valós számra a^x legyen a $\sup\left\{a^r : r\in\mathbb{Q},\ r<x\right\} = \inf\left\{a^s : s\in\mathbb{Q},\ x<s\right\}$ valós szám. Ha $0 < a < 1$ valós szám, akkor tetszőleges x valós számra a^x legyen az $\inf\left\{a^r : r\in\mathbb{Q},\ r<x\right\} = \sup\left\{a^s : s\in\mathbb{Q},\ x<s\right\}$. $1^x := 1$.

A 0 minden pozitív irracionális kitevőjű hatványát 0 értékűnek definiáljuk.

Az *n*-edik gyök fogalma

A hatványozás mint művelet megfordítását gyökvonásnak nevezzük: itt a hatvány értékének és kitevőjének az ismeretében keressük az alapot, jele $\sqrt[n]{a}$, ahol n a gyökkitevő, röviden kitevő.

Az egyértelműség miatt külön kell definiálnunk a gyökvonást páros és páratlan kitevőre:

D:

$$\begin{cases} n=2k\ (k\in\mathbb{Z}^+) \text{ és } a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}^- \text{ esetén } \sqrt[n]{a} \text{ legyen az a nemnegatív szám, amelynek } n\text{-edik hatványa } a; \\ n=2k+1\ (k\in\mathbb{Z}^+) \text{ és } a\in\mathbb{R} \text{ esetén } \sqrt[n]{a} \text{ legyen az a szám, amelynek } n\text{-edik hatványa } a. \end{cases}$$

A gyökvonás definíciója alapján a törtkitevős hatványt definiálhatjuk a következőképpen is:

D: $\forall a\in\mathbb{R}^+,\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{Z}^+\setminus\{1\}$ esetén $a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}$.

A négyzetgyökvonás azonosságai

A négyzetgyökvonás jele $\sqrt{a}$.

A hatványozás azonosságainak felhasználásával könnyen igazolhatóak a négyzetgyökvonás azonosságai is:

$$\mathbf{T}: \begin{cases} (6) & \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b} & a;b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}^-; \\ (7) & \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}} & a;b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}^-;\ b\neq 0; \\ (8) & \left(\sqrt{a}\right)^n=\sqrt{a^n} & a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}^-;\ n\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

További fontos azonosság, hogy $\forall a\in\mathbb{R}$ *esetén* $\sqrt{a^2}=|a|$.

Az (1)–(3) azonosságok igazak tetszőleges gyökkitevő esetén is (a megfelelő értelmezési tartományon), továbbá $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$ *és* $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$ *és* $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n\cdot m]{a^m}$.

A korábban ígért tételbizonyítás:

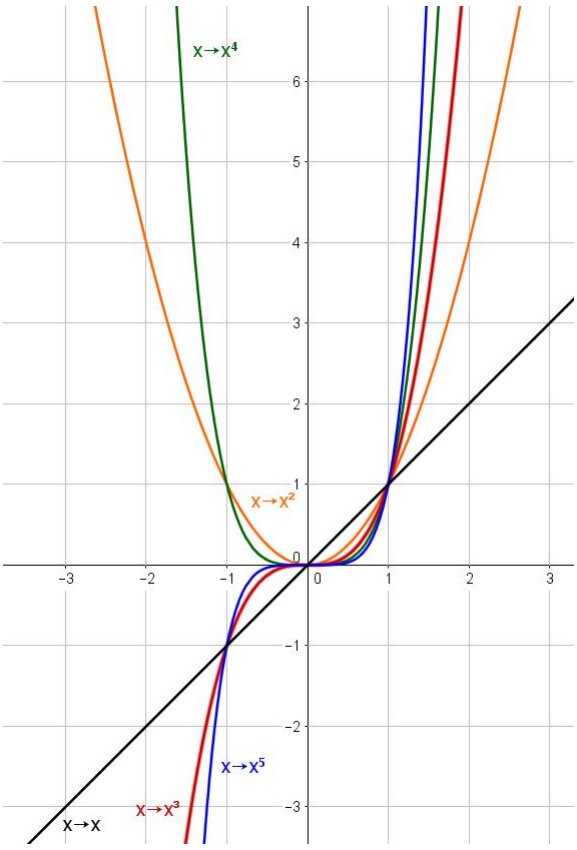
Tétel: Ha $a\in\mathbb{R}^+$, $n=\dfrac{p}{q}$, $m=\dfrac{r}{s}$ racionális számok $(p;r\in\mathbb{Z},\ q,s\in\mathbb{Z}^+\setminus\{1\})$, akkor $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$.

Bizonyítás: $a^n\cdot a^m=a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[qs]{a^{ps}}\cdot\sqrt[qs]{a^{qr}}=\sqrt[qs]{a^{ps}\cdot a^{qr}}=\sqrt[qs]{a^{ps+qr}}=a^{\frac{ps+qr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}=a^{n+m}$. **//**

Hatványfüggvények

Hatványfüggvénynek nevezzük az $x\mapsto x^n$ hozzárendelési szabállyal adott függvényt, ahol n tetszőleges, nullától különböző állandó. A függvény értelmezési tartománya n-től függ.

Ebben a témakörben csak az $n\in\mathbb{Z}^+$ eseteket (*pozitív egész kitevőjű hatványfüggvények*) vizsgáljuk.



A függvények jól látható módon három különböző csoportra bonthatók:

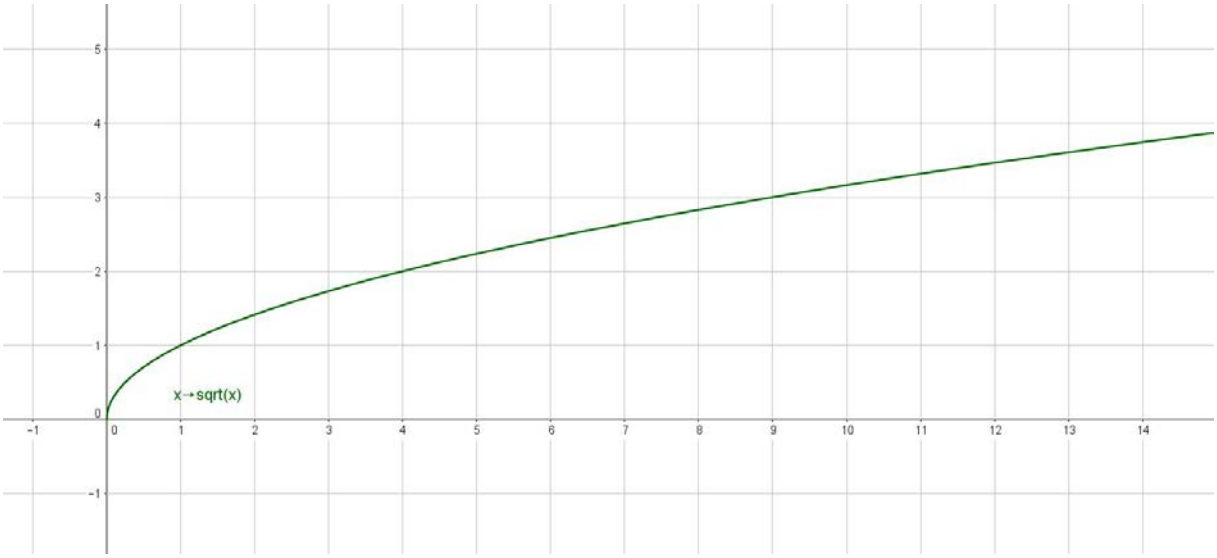
(1) $n = 1$;
(2) $n = 2k$;
(3) $n = 2k + 1$ $\quad (k\in\mathbb{Z}^+)$.

A függvények jellemzése a három esetet külön vizsgálva:

Szempont	$n = 1$	$n = 2k$	$n = 2k + 1$
Értelmezési tartomány:	**R**	**R**	**R**
Értékkészlet:	**R**	**R\R⁻**	**R**
Zérushely:	$x = 0$	$x = 0$	$x = 0$
Szélsőértékek:			
- maximum	nincs, felülről nem korlátos	nincs, felülről nem korlátos	nincs, felülről nem korlátos
- maximumhely	–	–	–
- minimum	nincs, alulról nem korlátos	$y = 0$	nincs, alulról nem korlátos
- minimumhely	–	$x = 0$	–
Paritás:	páratlan	páros	páratlan
Periodikusság:	nem periodikus	nem periodikus	nem periodikus
Növekedési viszonyok:	szigorúan monoton növekvő	$]-\infty;0]$ szigorúan monoton csökkenő; $[0;\infty[$ szigorúan monoton növekvő	szigorúan monoton növekvő
Függvénygörbe alakja:	egyenes	konvex	$]-\infty;0]$ konkáv; $]0;\infty]$ konvex

A négyzetgyökfüggvény

A négyzetgyökfüggvény a $[0;\infty]$ értelmezési tartományra szűkített $x \mapsto x^2$ függvény inverz függvénye.



A négyzetgyökfüggvény jellemzése:

Értelmezési tartomány:	**R\R⁻**
Értékkészlet:	**R\R⁻**
Zérushely:	$x = 0$
Szélsőértékek:	
- maximum	nincs, felülről nem korlátos

- maximumhely	–
- minimum	$y = 0$
- minimumhely	$x = 0$
Paritás:	nem páros és nem páratlan
Periodikusság:	nem periodikus
Növekedési viszonyok:	szigorúan monoton növekvő
Függvénygörbe alakja:	konkáv

Alkalmazások:

A hatványozás és a gyökvonás azonosságait a matematika minden ágában használjuk, ide *bármit* fel lehet sorolni az elsőfokúnál magasabb rendű egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásától kezdve a hosszúság-, terület- és térfogatszámításig.

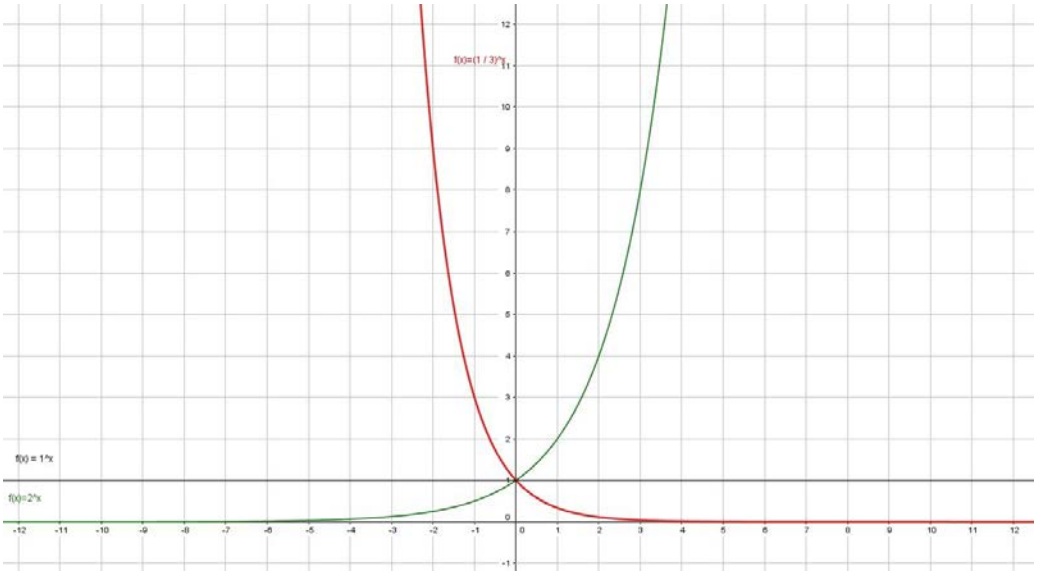
A $\sqrt{-1}$ értelmezése révén eljutunk a komplex számok halmazához.

6. tétel: A logaritmus fogalma és azonosságai. Az exponenciális és a logaritmusfüggvény.

A hatványozás definíciójának kiterjesztése valós kitevőjű hatványra lehetővé tette az

$$f : R \to R^+ \qquad x \mapsto a^x \qquad a > 0$$

függvény értelmezését, amelyet *exponenciális függvény*nek nevezünk.



Az exponenciális függvény jellemzése:

Szempont	***a* > 1**	***a* = 1**	**0 < *a* < 1**
Értelmezési tartomány:	**R**	**R**	**R**
Értékkészlet:	**R^+**	{1}	**R^+**
Zérushely:	nincs	nincs	nincs
Szélsőértékek:			
- maximum	nincs, felülről nem korlátos	$y = 1$	nincs, felülről nem korlátos
- maximumhely	–	$x \in \mathbb{R}$	–
- minimum	nincs, alulról korlátos, legnagyobb alsó korlát $k = 0$	$y = 1$	nincs, alulról korlátos, legnagyobb alsó korlát $k = 0$
- minimumhely	–	$x \in \mathbb{R}$	–
Paritás:	nem páros és nem páratlan	páros	nem páros és nem páratlan
Periodikusság:	nem periodikus	periodikus, periódushossza nincs*	nem periodikus
Növekedési viszonyok:	szigorúan monoton növekvő	konstans	szigorúan monoton csökkenő
Függvénygörbe alakja:	konvex	vízszintes egyenes	konvex

**A periódushossz egyik lehetséges értelmezése miatt.*

Továbbá a hatványozás mint művelet megfordítása is szükségessé vált: míg a hatványozásnál adott *a* alap és *b* kitevő esetén keressük a hatvány értékét, itt adott hatványértékhez keressük azt a kitevőt, amelyre az *a* alapot emelve megkapjuk a hatványértéket. E műveletet nevezzük logaritmusnak, melyet a következőképpen definiálunk:

D: $\log_a b$ jelenti azt a hatványkitevőt, amelyre *a*-t emelve *b*-t kapunk. Azaz $a^{\log_a b} = b$. A valós kitevőjű hatvány értelmezése miatt $a;b > 0$ *és* $a \neq 1$. (Mivel bármely valós *x*-re $1^x = 1$, ezért nincs 1-es alapú logaritmus.)

Az *a* alap az 1 kivételével tetszőleges pozitív szám lehet, de a gyakorlatban csak két alapot használunk, a 10-est és az *e* számot, ezek jelölése *lg*, illetve *ln*, ez utóbbiban az *n* betű a „logaritmus <u>*naturalis*</u>", *természetes alapú logaritmus*ra utal. (Az *e* számot a következőképpen értelmezzük: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718$, amely mind a matematikában, mind a természettudományokban nagy jelentőséggel bír (betűjelét *Leonhard Euler*ről kapta).

A logaritmusra vonatkozó legfontosabb azonosságok ($a;x;y;c > 0, \quad a;c \neq 1, \quad n \in \mathbb{R}$):

Tétel:

(1) $\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$

(2) $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

(3) $\log_a x^n = n \log_a x$

(4) $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$

Bizonyítás: Ezek közül most csak (1)-et bizonyítom, a többi igazolása hasonló módon történhet – a logaritmus definíciójára és a hatványozás azonosságaira történő hivatkozással.

A logaritmus definíciója szerint

$$x = a^{\log_a x}$$

$$y = a^{\log_a y}$$

$$xy = a^{\log_a xy}$$

Így egyrészt

$$xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = \text{a hatványozás azonossága miatt } = a^{\log_a x + \log_a y},$$

másrészt

$$xy = a^{\log_a (xy)}.$$

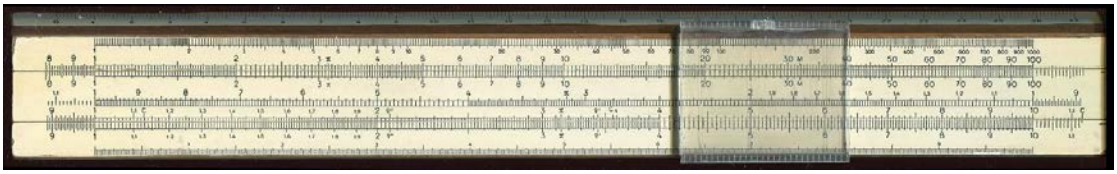
E kettőt összevetve

$$xy = a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a (xy)}$$

Mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton, ezért

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (xy). \textbf{ //}$$

Tetszőleges alapú logaritmust is ki tudunk számolni a (4) azonosság (*áttérés más alapú logaritmusra*) segítségével. A logaritmusnak a számológépek megjelenése volt nagy jelentősége, ennek segítségével lehetett könnyebben kiszámolni szorzatok, hányadosok és hatványok értékét, nagy segítség volt ebben az ún. logarléc, nekem ilyen volt a 70-es években:



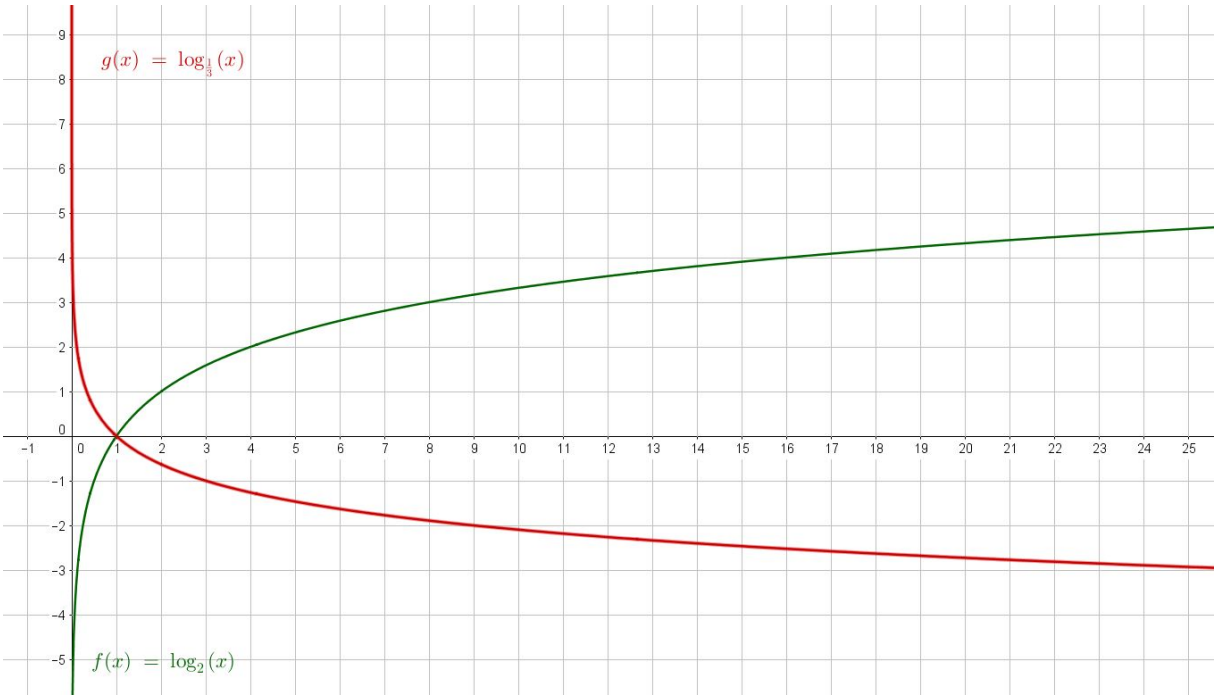
Ma már a legtöbb számológép képes tetszőleges alapú logaritmus kiszámítására is, így a logaritmus elvesztette jelentőségét a számolásokban.

A logaritmusfüggvény

D: Az $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \log_a x$ $\quad (a>0; a\neq 1)$ függvényt nevezzünk logaritmusfüggvénynek.

Más megfogalmazással a logaritmusfüggvény az ugyanolyan alapú exponenciális függvény *inverz függvénye* ($y=a^x \quad \to \quad x=a^y \quad \Leftrightarrow \quad y=\log_a x$).

A logaritmusfüggvény képe is a logaritmus alapjától függ:



A logaritmusfüggvény jellemzése:

Szempont	***a* > 1**	**0 < *a* < 1**
Értelmezési tartomány:	**R^+**	**R^+**
Értékkészlet:	**R**	**R**
Zérushely:	$x = 1$	$x = 1$
Szélsőértékek:		
- maximum	nincs, felülről nem korlátos	nincs, felülről nem korlátos

- maximumhely	–	–
- minimum	nincs, alulról nem korlátos	nincs, alulról nem korlátos
- minimumhely	–	–
Paritás:	nem páros és nem páratlan	nem páros és nem páratlan
Periodikusság:	nem periodikus	nem periodikus
Növekedési viszonyok:	szigorúan monoton növekvő	szigorúan monoton csökkenő
Függvénygörbe alakja:	konkáv	konvex

Alkalmazások:

A matematikán belül (az exponenciális és logaritmikus egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásán túl) elsősorban a sorozatoknál (leginkább a mértaninál), a kamat-, kamatoskamat-, törlesztőrészlet- és életjáradék-számításoknál használjuk.

A fizikában például a légnyomás magasságfüggését leíró barometrikus magasságformulában, a radioaktív anyagok bomlási törvényében, a molekuláris hőelméletben (hőmérséklet, entrópia) használjuk. A hangerősség mérésére használt decibel skála szintén logaritmikus, ahogy audióeszközeink hangerőszabályzója is.

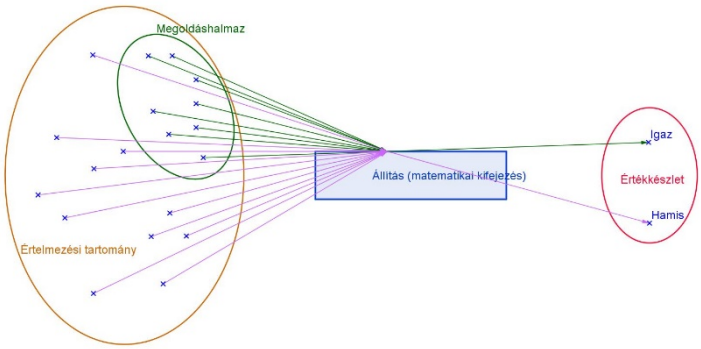
A kémiában ilyen a pH-skála a kémhatás jellemzésére, a biológiában is számos exponenciális törvénnyel (járványterjedés, egér-elefánt görbe stb.) találkozunk.

Feltétlen meg kell még említenünk pl. a hálózattudományban is használt hatványfüggvény-eloszlásokat, de számos gazdasági és társadalmi törvényt is fel lehet sorolni itt.

7. tétel: Egyenletmegoldási módszerek, ekvivalencia, gyökvesztés, hamis gyök. Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek.

Az *egyenlet*, *egyenlőtlenség* fogalmát többféleképpen szokták meghatározni, szerintem a következő a legjobb:

D: Az egyenlet (*egyenlőtlenség*) olyan logikai függvény, amelynek állítása (nyitott mondat) két, egyenlőségjellel (*relációjellel*) összekapcsolt matematikai kifejezés, amelynek részeit bal oldalnak és jobb oldalnak nevezzük. A logikai függvény értelmezési tartománya az egyenlet (*egyenlőtlenség*) értelmezési tartománya. Az értelmezési tartomány azon részhalmazát, amelyhez a logikai függvény az igaz értéket rendeli, az egyenlet (*egyenlőtlenség*) megoldáshalmazának (igazsághalmazának) nevezzük. Egyenlet esetén a megoldáshalmaz elemeit *gyök*nek nevezzük.



Az egyenlet (egyenlőtlenség) értelmezési tartományától és állításától függően beszélünk *skaláregyenlet*ről, *vektoregyenlet*ről, *tenzoregyenlet*ről stb.

Ennek alapján könnyű definiálni az *azonosság és az ekvivalencia* fogalmát is.

D: Azokat az egyenleteket (egyenlőtlenségeket), amelyek értelmezési tartománya és megoldáshalmaza megegyezik, *azonosság*nak nevezzük.

D: Két egyenletet (egyenlőtlenséget) akkor nevezünk *ekvivalens*nek, ha értelmezési tartományuk és megoldáshalmazuk megegyezik.

Feladatokban gyakran nem adják meg az egyenlet (egyenlőtlenség) értelmezési tartományát (vagy csak egy kiindulási halmazt adnak meg). Abban állapodtunk meg, hogy ekkor az egyismeretlenes egyenlet (egyenlőtlenség) értelmezési tartománya a valós számok halmazának az a legbővebb részhalmaza, amelyen az adott kifejezés értelmezhető. (Ezt az elvet alkalmazzuk többismeretlenes egyenlet, egyenlőtlenség esetén is.)

Egyenletmegoldási módszerek

Háromféle egyenletmegoldási módszert használunk:

a) grafikus;
b) algebrai és
c) közelítő.

Grafikus megoldás esetén az egyenlet bal és jobb oldalát (mint függvényt vagy ponthalmazt) közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk, és leolvassuk a közös pontok koordinátáit. Egyismeretlenes egyenlet esetén a közös pontok abszcisszái lesznek az egyenlet gyökei. E megoldási mód *előnye* a legtöbb esetben a gyorsasága és egyszerűsége, *hátránya*, hogy a közös pontok koordinátái nem mindig olvashatók le pontosan, ebben az esetben megoldásunkat algebrai úton kell kiegészítenünk, de sok esetben így egyszerűbb egyenletekhez jutunk, amelyeket már könnyebben tudunk megoldani.

Az *algebrai megoldás*ok több részre bonthatók:

(1) <u>értelmezésitartomány-vizsgálat</u>: egyesével megvizsgálva a matematikai kifejezést alkotó kifejezések értelmezési tartományát sok egyenlet esetén közös részként üres halmazt vagy csak néhány elemet tartalmazó halmazt kapunk (amelyeket aztán már egyesével könnyű leellenőrizni).

Például: *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!* $\sqrt{x-5}=3-x$ vagy *Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán!* $\sqrt{x-3}=5-x$.

(2) <u>értékkészlet-vizsgálat</u>: hasonlóképpen járunk el, mint (1)-ben – és hasonló eredményre is számíthatunk, például a $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-5}+\sqrt{x+1}=0$ egyenlet esetén. Gyakran fordul elő, hogy *kétismeretlenes egyenlet*eket is ennek segítségével tudunk megoldani, például ezt:

$$x^2+4x+5=\cos(\pi y).$$

A bal oldal ≥ 1, míg a jobb oldal ≤ 1, így egyenlőség akkor és csak akkor lehet, ha mindkét oldal értéke 1.

(3) <u>szorzattá bontás</u>: elsősorban magasabb fokú egyenletek megoldásában használjuk, először nullára rendezzük az egyenletet, majd kihasználjuk azt, hogy egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, például $x^3=4x^2-5x$.

(4) a <u>mérlegelv</u> alkalmazása: a leggyakrabban használt módszer, az egyenlőség két oldalát azonos módon változtatjuk, azaz ekvivalens műveleteket hajtunk végre rajtuk. Ezek a következők: összeadás és kivonás, nullától különböző számmal való szorzás és osztás, illetve szigorúan monoton függvények hozzá- és elvétele. Az átalakítások célja, hogy minél egyszerűbb egyenletet kapjunk, a végcél egy $x=k,\ k\in D$ alakú egyenlet.

*Közelítő megoldás*t akkor használunk, ha az egyenlet algebrai úton nem oldható meg. Erre sok *gyökközelítő módszer*t dolgoztak ki, amelyek igen számolásigényesek. Ma már nem használjuk ezeket, helyette különböző *számítógépes programok*at hívunk segítségül. Ilyen például a *GeoGebra* vagy a *Wolfram Alpha*, melyek nem csak számítógépen futtathatók, de okostelefonon is elérhetők. Az egyenletet nullára rendezzük, a másik oldalt pedig ábrázoltatjuk. Az így kapott grafikon zérushelyét a kívánt pontossággal meg tudjuk határozni, hiszen a programok lehetővé teszik az ábrázolás lépésközének csökkentését (azaz tulajdonképpen *grafikus úton* oldatjuk meg az egyenletet).

Gyökvesztés, hamis gyök

Az egyenletek algebrai megoldása során gyakran kénytelenek vagyunk nem ekvivalens műveleteket is végrehajtani, például a legtöbb gyökös egyenletnél nem kerülhető ki a négyzetre emelés. Sokszor előfordul az is, hogy a megoldás során olyan *azonosság*ot alkalmazunk, amely nem teljesül minden valós szám esetén, erre a logaritmus azonosságai a legjobb példák.

Ha az algebrai megoldás során végrehajtott művelet *bővíti az eredeti értelmezési tartományt* (például a négyzetre emelés), akkor olyan gyököt is kaphatunk, amely például az eredeti értelmezési tartományban nincs benne – ezeket szokás *hamis gyök*nek nevezni.

Ha olyan műveletet hajtunk végre, amely *szűkíti az értelmezési tartományt*, akkor pedig *gyökvesztés* léphet fel. Gyököt veszíthetünk akkor is, ha ismeretlent tartalmazó tényezővel osztunk, előfordulhat ugyanis, hogy az osztó értéke az ismeretlen valamely értékére nézve 0.

Két logaritmusos példa ezekre az esetekre:

(1)	$2\lg x = 2$	$D=\mathbb{R}^+$	(2)	$\lg x^2 = 2$	$D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
	$\lg x^2 = 2 = \lg 100$	$D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$		$2\lg x = 2$	$D=\mathbb{R}^+$
	$x^2 = 100$	$D=\mathbb{R}$		$\lg x = 1$	$D=\mathbb{R}^+$
	$\underline{\underline{x_{1,2} = \pm 10}}$	$D=\mathbb{R}$		$\underline{\underline{x = 10}}$	$D=\mathbb{R}$

(1)-nél hamis gyököt kapunk, (2)-nél pedig gyököt vesztünk a második sorbeli értelmezésitartomány-változás miatt.

Ezek kiszűrése miatt (is) célszerű az *eredeti egyenletbe* behelyettesítve leellenőrizni a kapott gyököket.

Másodfokú egyenletek

D: Az egyismeretlenes másodfokú egyenlet egy olyan egyenlet, amely ekvivalens algebrai átalakításokkal olyan egyenlet alakjára hozható, amelynek egyik oldalán másodfokú polinom szerepel, a másik oldalán pedig nulla (redukált alak). A másodfokú egyenlet általános kanonikus alakja:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ ahol } a;b;c \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ D = \mathbb{R}.$$

Tétel: Az $ax^2 + bx + c = 0$, ahol $a;b;c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $D = \mathbb{R}$ másodfokú egyenlet megoldóképlete:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Bizonyítás: Osszuk el az egyenletet az $a \neq 0$ együtthatóval, majd a kapott kifejezést bontsuk teljes négyzetté!

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad / : a \neq 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

Rendezés után kapjuk, hogy $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

A $D = b^2 - 4ac$ kifejezést a másodfokú egyenlet *diszkriminánsa*nak nevezzük. Ennek értékétől függően három esetet különböztetünk meg:

I. $D > 0$ esetén $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2$, emiatt

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ebben az esetben a másodfokú egyenletnek *két különböző valós gyöke* van.

II. $D = 0$ esetén $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$, amelyből

$$x+\frac{b}{2a}=0$$

$$x=-\frac{b}{2a}$$

Ebben az esetben a másodfokú egyenletnek *két egybeeső valós gyöke* van (más megközelítésmódban: egy valós gyöke van), a megoldóképlet ebben az esetben is jó eredményt ad.

III. $D < 0$ esetén a $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} < 0$ egyenletnek *nincs valós gyöke*. A megoldóképlet ebben az esetben is használható, mert a gyök alatt lévő negatív számból következtethetünk a valós gyökök hiányára. **//**

A következő két tételt a megoldóképlet használatával is igazolhatjuk:

T: A $P(x)=ax^2+bx+c$ $(a;b;c\in\mathbb{R},\ a\neq 0,\ D=\mathbb{R})$ polinom gyöktényezős alakja $P(x)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$, ahol x_1 és x_2 az $ax^2+bx+c=0$ másodfokú egyenlet gyökei. Ha az egyenletnek nincsenek gyökei, akkor a polinom nem bontható szorzattá.

T: Az $ax^2+bx+c=0$ $(a;b;c\in\mathbb{R},\ a\neq 0,\ D=\mathbb{R})$ másodfokú egyenlet gyökeire (*ha vannak*):

I. $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$;

II. $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

(*Gyökök és együtthatók közti összefüggések* vagy *Viète-képletek*)

Másodfokú egyenletre visszavezethető egyenletek

Általában két fő egyenlettípust szoktunk idesorolni:

a) négyzetgyökös egyenletek, amelyek (egy vagy két) négyzetre emelés után másodfokú egyenletre vezetnek, például $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+5}=6$. Hamis gyökök megjelenésére számíthatunk!
b) azokat, amelyek valamilyen alkalmas új ismeretlen bevezetésével lesznek másodfokú egyenletek, itt magasabb fokú, exponenciális és trigonometrikus egyenletek gyakoriak:

(1) $3x^2-36x+\frac{3}{x^2-12x-42}=136$ $\qquad y:=x^2-12x$

(2) $4^{x+\frac{1}{2}}=6\cdot 2^{x-1}+2$ $\qquad y:=2^x$

(3) $3\cos^2 x+2\sin x=1$ $\qquad \cos^2 x=1-\sin^2 x$, majd $y:=\sin x$

Alkalmazások

A matematika szinte minden ágában oldunk meg egyenleteket, a koordinátageometria a geometria és az algebra kapcsolatára épül.

De egyenletmegoldással minden más tudományban is találkozunk, a fizikától a kémián és a biológián át a közgazdaságtanig. A másodfokú egyenletek ezen egyenletek jelentős részét teszik ki.

8. tétel: A leíró statisztika jellemzői, diagramok. Nevezetes középértékek.

D: A *statisztika* a valóság számszerű információinak megfigyelésére, összegzésére, elemzésére és modellezésére irányuló gyakorlati tevékenység és tudomány, amely *mért* vagy *gyűjtött adat*okon alapszik.

Az egyértelműség végett néhány fogalmat meg kell különböztetnünk egymástól, így különbözik egymástól az *adat* és az *elem*, valamint az *adatsokaság* és a *halmaz*. Míg egy halmazban egy elem egyszer fordul elő, addig egy adatsokaságban egy adat többször is benne lehet. Továbbá egy halmazban az elemek sorrendje nem számít, míg egy adatsokaságban az adatok sorrendje is gyakran fontos jellemző (árfolyamok, lázgörbe stb.).

Adatsokaságok jellemzői

D: Az adatsokaság legnagyobb és legkisebb adatának különbségét *terjedelem*nek nevezzük.

Az adatok adott szempontok szerinti feldolgozásához, elemzéséhez azokat nagyság szerint *osztály*okra bonthatjuk, ezek *osztályterjedelme* lehet egyenlő vagy különböző is.

D: Az azonos adatok előfordulásának számát *gyakoriság*nak nevezzük, ezek teljes adatsokasághoz viszonyított arányát pedig *relatív gyakoriság*nak.

Az adatsokaság egészét *középértékek*kel és a középértékektől való *eltérés*sel jellemezhetjük.

Középértékek:

(1) *átlag*: Az $\{a_1;a_2;a_3;...;a_n\}$ adatsokaság átlagán a benne szereplő adatok számtani közepét értjük: $\bar{a}=\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}$. Ha az adatsokaságban vannak egyforma adatok, akkor az átlagot ezek *súlyozott közepe*ként is számolhatjuk: $\bar{a}=\frac{\sum_{i=1}^{l}k_ia_i}{\sum_{i=1}^{l}k_i}$, ahol $\sum_{i=1}^{l}k_i=n$.

(2) *módusz*: az adatsokaságban leggyakrabban előforduló adat. Ha több ilyen is van, akkor a relatív gyakoriságuk függvényeként vagy mindegyiket módusznak nevezzük, vagy azt mondjuk, hogy az adatsokaságnak nincs módusza.

(3) *medián*: az adatokat nagyság szerinti (növekvő vagy csökkenő) sorrendbe rendezve a középső adat. Ha *n* páratlan szám, akkor van ilyen, ha *n* páros, akkor a két középső számtani közepe.

Eltérések a középértékektől:

Egy (például fizikai) mérés során – a mérés *jóság*ának jellemzése végett – rendkívül fontos a mért adatok átlagának meghatározásán túl a mérés hibahatárának meghatározása is. Ennek jellemzésére nem használhatjuk az *átlagtól való eltérés átlagá*t, hiszen az minden esetben 0 lenne. Emiatt két mennyiséggel szoktuk jellemezni ezt:

(1) *átlagos abszolút eltérés*: ez az eltérések abszolút értékének számtan közepe: $S_n(a) == \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|\bar{a}-a_i\right|}{n}$;

(2) *szórás*: az eltérések négyzetes közepe, azaz $D(a)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{a}-a_i\right)^2}{n}}$.

Az adatsokaságok megjelenítése – diagramok

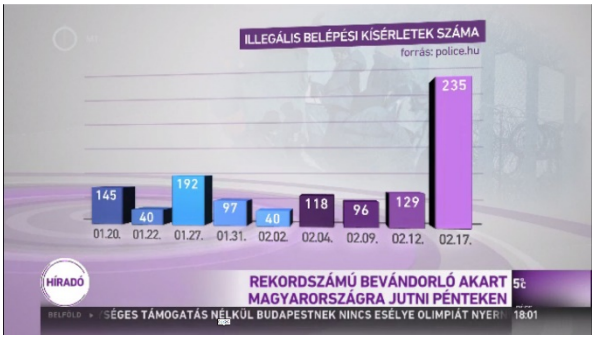
„Egy jó kép többet mond ezer szónál." – szokták mondani a fotósok, és ez vonatkozik az adatsokaságok jellemzőinek bemutatására is, amelyeket különböző típusú diagramokon szoktunk megtenni.

Az *adatsokaság jellegének megfelelően* a következő diagramokat használjuk (*illik használni…*):

(1) ha az ugyanabban az időben keletkező (létező) *azonos adatok egymáshoz és a teljes adathalmazhoz viszonyított arányát* kívánjuk bemutatni, akkor *kör- vagy szalagdiagram*ot használunk (például iskolai dolgozatok minősítése, választásokon különböző pártokra leadott szavazatok száma stb.). Ekkor a körcikkek középponti szöge, illetve a szalagdarabok hossza egyenesen arányos a relatív gyakorisággal.
(2) ha az ugyanabban az időben keletkező (létező) *azonos adatok egymáshoz viszonyított arányát és az egyes adatok gyakoriságát* kívánjuk bemutatni, akkor *oszlopdiagram*ot használunk (például iskolai dolgozatok minősítése, választásokon különböző pártokra leadott szavazatok száma stb.). Ekkor az egyes (azonos adathoz tartozó) oszlopok magassága az egyes azonos adatok gyakorisága lesz.
(3) ha *az adatok mellett a keletkezésük sorrendje* is fontos, akkor *vonaldiagram*ot használunk (például devizaárfolyamok, lázgörbe stb.). Ekkor a diszkrét pontokat össze szoktuk kötni.

Oszlop- és vonaldiagram esetén az adatok értékét (függőleges tengely) nem mindig az $y = 0$ egyeneshez viszonyítjuk, ez a jellemezni kívánt adatsokaság jellegétől is függ (*tőzsdeindex* vs. *egy ország lakosságának száma, ha csak a nagyságára vagyunk kíváncsiak, nem a változás mértékére*).

*Sir Winston Churchill*nek tulajdonítják a következő mondást: *„Csak annak a statisztikának hiszek, amelyet magam hamisítottam."* Bár valószínűleg nem tőle, hanem minden bizonnyal egy német politikustól származik (a II. világháború idejéből), erre nekünk is figyelnünk kell diagramok megtekintésekor, mert könnyen lehet manipulálni gondolkodásunkat a diagramokkal. Bár vannak egyértelmű, szándékos megtévesztések is… ☹



Nevezetes közepek

A matematikában egy pozitív adatokból álló adatsokaság jellemzésére négy, ún. *nevezetes közep*et szoktunk használni ($n \geq 2$):

D: Az $\{a_1;a_2;a_3;\ldots;a_n\}$, $a_i \in \mathbb{R}^+$ számok *számtani közepén* az $A(a_i)=\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$ számot értjük.

D: Az $\{a_1;a_2;a_3;...;a_n\}$, $a_i \in \mathbb{R}^+$ számok *mértani közepén* a $G(a_i)=\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$ számot értjük.

D: Az $\{a_1;a_2;a_3;...;a_n\}$, $a_i \in \mathbb{R}^+$ számok *harmonikus közepén* a $H(a_i)=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$ számot értjük.

D: Az $\{a_1;a_2;a_3;...;a_n\}$, $a_i \in \mathbb{R}^+$ számok *négyzetes (kvadratikus) közepén* a $Q(a_i)=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}{n}}$ számot értjük.

A négy nevezetes közép közt a következő összefüggés áll fönn:

T: Az $a_1;a_2;a_3;...;a_n$, $(a_i \in \mathbb{R}^+,\ n \geq 2)$ valós számok esetén

$$\min(a_i) \leq H(a_i) \leq G(a_i) \leq A(a_i) \leq Q(a_i) \leq \max(a_i), \text{ és}$$

egyenlőség akkor és csak akkor áll fönn, ha $a_1=a_2=a_3=...=a_n$.

E tétel állításai közül egy speciális esetet fogok bizonyítani:

Tétel: Ha $a;b \in \mathbb{R}^+$, akkor $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \dfrac{a+b}{2}$, azaz két pozitív szám harmonikus közepe kisebb vagy egyenlő, mint a számtani közepük, továbbá egyenlőség akkor és csak akkor áll fönn, ha $a=b$.

Bizonyítás: Ekvivalens átalakításokat végzünk. Mivel $a;b \in \mathbb{R}^+$, ezért

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2} \qquad / \cdot 2(a+b) > 0$$

$$4ab \leq (a+b)^2$$

$$4ab \leq a^2+2ab+b^2 \qquad / -4ab$$

$$0 \leq a^2-2ab+b^2$$

$$0 \leq (a-b)^2,$$

ami mindig teljesül, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fönn, ha $a=b$. **//**

Alkalmazások

*Statisztiká*kat mind a természet-, mind a társadalomtudományokban rendkívül gyakran használunk különböző folyamatok időbeli jellemzésére, illetve egy adott időpontbeli állapotuk rögzítésére.

Csak *néhány példa*: devizaárfolyamok, tőzsdeindexek, egy közösség életkor szerinti megoszlása (korfa), lázgörbe, pártszimpátia stb.

A *nevezetes közepek*et pedig gyakran használjuk szélsőérték-feladatok megoldása során, függvények maximumának és minimumának meghatározásakor stb.

9. tétel: Számsorozatok és tulajdonságaik (korlátosság, monotonitás, konvergencia). Műveletek konvergens sorozatokkal. A számtani sorozat, az első *n* tag összege.

A hétköznapi életben a *sorozat* szó azonos vagy hasonló dolgok egymást követő sorát jelenti. A matematikában használt fogalom ennek megfelelően a következő:

D: A pozitív egész számok halmazán értelmezett valós értékű függvényeket *számsorozat*nak (röviden: *sorozat*nak) nevezzük. A függvény által az *n* pozitív egészhez rendelt értéket a sorozat *n-edik tag*jának (néha *elem*ének) nevezzük, *n*-et pedig a tag *index*ének. Ha a függvény minden pozitív egészhez ugyanazt a valós számot rendeli, akkor azt *konstans sorozat*nak nevezzük.

A sorozatokat a függvényektől kissé eltérően jelöljük, betűjelük általában az ábécé elejéről egy kisbetű:

$a:\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ $\quad (a_n)$ vagy $\{a_n\}$, továbbá a sorozat *n*-edik tagja a_n.

A korlátosság és a monotonitás fogalmát a „hagyományos" függvényre vonatkozó definíció alapján határozzuk meg.

Korlátosság

D: Az (a_n) sorozat *alulról korlátos*, ha létezik olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $a_n \geq k$. A *k* számot a sorozat *alsó korlát*jának nevezzük (ha létezik, akkor végtelen sok ilyen van), közülük a legnagyobbat pedig az (a_n) sorozat *legnagyobb alsó korlát*jának (infimum, *k**).

D: Az (a_n) sorozat *felülről korlátos*, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $a_n \leq K$. A *K* számot a sorozat *felső korlát*jának nevezzük (ha létezik, akkor végtelen sok ilyen van), közülük a legkisebbet pedig az (a_n) sorozat *legkisebb felső korlát*jának nevezzük (szuprémum, *K**).

D: Az (a_n) sorozat *korlátos*, ha alulról és felülről is korlátos. (Azaz létezik olyan $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$, hogy $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $|a_n| \leq \kappa$.)

Monotonitás

D: Az (a_n) sorozat *szigorúan monoton növekvő*, ha $\forall n;m \in \mathbb{Z}^+$, $n > m$ esetén $a_n > a_m$.

D: Az (a_n) sorozat *szigorúan monoton csökkenő*, ha $\forall n;m \in \mathbb{Z}^+$, $n > m$ esetén $a_n < a_m$.

D: Az (a_n) sorozat *monoton növekvő*, ha $\forall n;m \in \mathbb{Z}^+$, $n > m$ esetén $a_n \geq a_m$.

D: Az (a_n) sorozat *monoton növekvő*, ha $\forall n;m \in \mathbb{Z}^+$, $n > m$ esetén $a_n \leq a_m$.

E sorozatokat összefoglaló néven *monoton sorozat*oknak nevezzük.

Konvergencia

A konvergencia fogalma a sorozatok határértékének fogalmához tartozik.

D: Az *a* szám *ε sugarú környezet*én ($a;\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$) értjük az $]a-\varepsilon;a+\varepsilon[$ nyitott intervallumot a számegyenesen.

D: Az (a_n) sorozatnak van *határérték*e (az (a_n) sorozat *konvergens*), ha van olyan $a \in \mathbb{R}$ szám, hogy az *a* szám bármely *ε* sugarú környezetében a sorozat *majdnem minden tag*ja benne van. (Vagyis az *a* szám *ε* sugarú környezetén kívül a sorozatnak legfeljebb véges sok tagja lehet.)

Jelölése: $a_n \to a$ *vagy* $\lim(a_n) = a$ *vagy* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Ezzel a definícióval ekvivalens (a sokszor jobban használható) következő meghatározás:

D: Az (a_n) sorozatnak van *határérték*e (az (a_n) sorozat *konvergens*), ha van olyan $a \in \mathbb{R}$ szám, hogy $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ *küszöbszám*, hogy ha $n > N$, akkor $|a_n - a| < \varepsilon$.

D: Az (a_n) sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

A divergens sorozatok két sűrűn használt típusa:

D: Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat a *végtelenbe divergál* ($a_n \to \infty$), ha $\forall K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ *küszöbszám*, hogy ha $n > N$, akkor $a_n > K$.

D: Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat a *mínusz végtelenbe divergál* ($a_n \to -\infty$), ha $\forall k \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ *küszöbszám*, hogy ha $n > N$, akkor $a_n < k$.

Néhány fontos és gyakran használt tétel a sorozatok konvergenciájával kapcsolatban:

T: Konvergens sorozatnak egy határértéke van.

T: Minden konvergens sorozat korlátos.

T: Ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.

Műveletek konvergens sorozatokkal

Egy sorozat konvergens voltának eldöntése és határértékének meghatározása sokszor nem könnyű feladat. A következő tételek ennek megkönnyítését szolgálják.

T: Legyen az (a_n) sorozat konvergens és $a_n \to a$, továbbá $c \in \mathbb{R}$, adott valós szám, akkor a $(c \cdot a_n)$ sorozat is konvergens, és $c \cdot a_n \to c \cdot a$.

Tétel: Legyen az (a_n) és a (b_n) sorozat konvergens és $a_n \to a$, $b_n \to b$, akkor az $(a_n \pm b_n)$ sorozat is konvergens, és $a_n \pm b_n \to a \pm b$.

Bizonyítás: Az összegre vonatkozó tételt bizonyítom, azaz megmutatom, hogy

$\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ *küszöbszám*, hogy ha $n > N$, akkor $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$.

Legyen *ε* > 0, rögzített szám!

Ekkor $|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \le$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt $\le |a_n - a| + |b_n - b|$

Mivel $a_n \to a$, így

$\forall \varepsilon > 0$ számhoz, így $\frac{\varepsilon}{2}$–höz is $\exists N_1 \in \mathbb{Z}^+$ *küszöbszám*, hogy ha $n > N_1$, akkor $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Mivel $b_n \to b$, így

$\forall \varepsilon > 0$ számhoz, így $\frac{\varepsilon}{2}$–höz is $\exists N_2 \in \mathbb{Z}^+$ *küszöbszám*, hogy ha $n > N_2$, akkor $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tehát ha $N = \max(N_1; N_2)$, akkor

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ . //}$$

T: Legyen az (a_n) és a (b_n) sorozat konvergens és $a_n \to a$, $b_n \to b$, akkor az $(a_n \cdot b_n)$ sorozat is konvergens, és $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$.

T: Legyen az (a_n) és a (b_n) sorozat konvergens és $a_n \to a$, $b_n \to b$, továbbá $b \ne 0$, $b_n \ne 0$ minden *n*-re, akkor az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat is konvergens, és $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

T: Legyen az (a_n) sorozat konvergens, $a_n \to a$, és $a_n \ge 0$ minden *n*-re, akkor a $\left(\sqrt{a_n}\right)$ sorozat is konvergens, és $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$.

A számtani sorozat

D: Azokat a számsorozatokat, amelyekben az egymást követő tagok különbsége állandó, számtani sorozatnak nevezzük. Azaz: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ *esetén* $a_{n+1} - a_n = \text{állandó} = d$, ahol d a számtani sorozat különbsége (differenciája).

A számtani sorozat *n*-dik tagját és az első *n* tag összegét a számtani sorozat első tagjának és különbségének ismeretében a következő tételek alapján lehet kiszámítani:

Tétel: Ha számtani sorozat első tagja a_1, különbsége *d*, akkor

(1) $\quad a_n = a_1 + (n-1)d;$

(2) $\quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n.$

Bizonyítás: A (2) tételt fogom bizonyítani. A „*kis Gauss*" módszerét követve írjuk fel a számtani sorozat első *n* tagjának összegét kétféleképpen, majd adjuk össze azokat!

$$\left.\begin{aligned} S_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d); \\ S_n &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_n - (n-2)d) + (a_n - (n-1)d). \end{aligned}\right\} +$$

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ darab}} = (a_1 + a_n)n,$$

amelyből 2-vel osztva a tétel első felének állítását kapjuk, míg ha ebbe behelyettesítjük az (1)-ben szereplő kifejezést, megkapjuk a második felét is. **//**

A sorozat onnan kapta a nevét, hogy ha $1 \le i < n$ egész, akkor $a_n = \frac{a_{n-i} + a_{n+i}}{2}$, azaz a sorozat bármely tagja az ugyanannyival előtte és utána lévő tagok számtani közepe.

Alkalmazások

A sorozatok konvergenciáját gyakran használjuk a függvények végtelenben vett határértékének meghatározásához, folytonosságuk megmutatásához (*Heine-féle definíció*).

Néhány nevezetes sorozat és határértékük:

(i) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, a természetes alapú logaritmus alapszáma (*Euler-féle szám*);

(ii) Legyen S_n az első n pozitív egész szám négyzete reciprokának összege, azaz $S_n = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$. Ekkor $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$;

(iii) Legyen S_n az első n prímszám reciprokának összege, azaz $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p_n}$. Ekkor $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.

A számtani sorozathoz (is) kapcsolhatóan további nevezetes (és gyakran használt) összegek:

(a) Az első n pozitív egész szám összege $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$;

(b) Az első n pozitív egész szám négyzetének összege $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(c) Az első n pozitív egész szám köbének összege $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

A hétköznapi életben (*jó közelítéssel*) számtani sorozatot alkot például a színházi nézőterek, a stadionok soraiban lévő ülőhelyek száma. A ruhaanyagokat *vég*ekben árulják, itt az egy „menetben” lévő anyaghosszak alkotnak számtani sorozatot.

Megjegyzés:

A vizsgázók általában a számtani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó tételt szokták bizonyítani, de ez elég egyszerű. Én a másikat választanám…

10. tétel: Mértani sorozat, az első *n* tag összege, végtelen mértani sor. Kamatszámítás, gyűjtőjáradék, törlesztőrészlet. Exponenciális folyamatok a társadalomban és a természetben.

A mértani sorozat fogalmát már az ókori egyiptomiak is ismerték, és összegük is érdekelte őket. Konkrét feladatok esetén ki is tudták számolni az összeget. Megtalálták ugyanis a Rhind-papiruszon (i. e. 1750) a következő feladat – amely később feladatgyűjteményekben és népi találós kérdésekben is felbukkant – igen tömör megoldását: *„Ha 7 ház mindegyikében 7 macska van, mindegyik megfogott 7 egeret, minden egér megevett 7 búzaszemet, minden búzaszemből 7 hekat búza termett volna, akkor hány hekat búza lett volna abból?”*

A papiruszon maga a feladat nem szerepel, csak a megoldás szűkszavú leírása („Ház: 7 – macska: 49 – egér: 343 – ...” stb.), de lehetetlen nem rájönni, továbbá a papirusz sem utal az összegképlet ismeretére: végigszámolták a sorozat tagjait, és úgy adták össze.

Hasonló példa szerepel egy 19. századi angol nonszensz mondókában:

„As I was going to St. Ives,
I met a man with seven wives,
Every wife had seven sacks,
Every sack had seven cats,
Every cat had seven kits,
Kits, cats, sacks and wives,
How many were going to St. Ives?”

Ez a példa az egyiptomitól annyiban tér el, hogy beugratós feladat: csak egyvalaki ment St. Ives-ba, mégpedig a vers elbeszélője, az asszonyos-zsákos kompánia St. Ives felől jött, nem pedig oda ment). (Forrás: https://hu.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9rtani_sorozat 2017.07.08.)

A mértani sorozat eredeti, rekurzív definíciója a következő:

D: Azokat a számsorozatokat, amelyekben az egymást követő tagok hányadosa állandó, mértani sorozatnak nevezzük. Azaz: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ *esetén* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{állandó} = q$, ahol q a mértani sorozat hányadosa (kvóciense).

Ez a definíció kizárja azt, hogy a sorozat bármely tagja, illetve kvóciense 0 legyen, ellentétben az $a_{n+1} = a_n \cdot q$ *definícióval.*

A mértani sorozat *n*-dik tagját és az első *n* tag összegét a mértani sorozat első tagjának és hányadosának ismeretében a következő tételek alapján lehet kiszámítani:

Tétel: Ha mértani sorozat első tagja a_1, hányadosa q, akkor

(1) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

(2) $q = 1$ *esetén* $S_n = n \cdot a_1$

(3) $q \neq 1$ *esetén* $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Bizonyítás: A (3) tételt fogom bizonyítani.

Az (1) tételt felhasználva

$$-\uparrow\begin{cases} S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} & / \cdot q \neq 0 \\ S_nq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \end{cases}$$

$$S_nq - S_n = a_1q^n - a_1$$

$$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1) \qquad / : (q-1) \neq 0$$

$$S_n = a_1\frac{q^n - 1}{q-1}$$

Ezt akartuk bizonyítani.

A végtelen mértani sor

D: A $\sum_{i=1}^{\infty} a_1q^{i-1}$, ún. „végtelen összeget” végtelen mértani sornak nevezzük.

D: Ha a $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_1q^{i-1}$ határérték létezik és véges, akkor azt a végtelen mértani sor összegének nevezzük, és *S*-sel jelöljük.

T: Ha a mértani sorozat első tagja a_1, és hányadosa abszolút értéke kisebb, mint 1, akkor $S = \frac{a_1}{1-q}$.

E tételt könnyű bizonyítani, felhasználva a mértani sorozat első *n* tagjának összegére vonatkozó képletet, illetve azt a tételt, hogy ha $|q| < 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

A végtelen mértani sor összegképletének felhasználásával tudjuk a végtelen szakaszos tizedes törteket két egész szám hányadosaként felírni, például $0,\dot{a}b\dot{c} = \frac{\overline{abc}}{10^3 - 1}$. (*Vö.: A racionális számok kétféle definíciója.*)

Kamatszámítás

Közgazdasági megfogalmazás szerint *a kamat a pénz időértékének megtestesülése*. Ha egy pénzösszeget (*betét*) (jellemzően) egy bankban elhelyezünk, akkor a bank a pénzünk használatáért a betétünkre bizonyos *kamat*ot ad. A kamat és a betét százalékban kifejezett hányadosát *kamatláb*nak nevezzük. Hasonlóan, ha a bank pénzét használjuk, akkor ezért a felvett *hitel*ért bizonyos ellenszolgáltatást kell nyújtanunk.

A továbbiakban azzal a feltevéssel élünk, hogy a futamidő alatt a kamatláb mértéke nem változik (ami a valóságban elég ritka).

Jó, ha tudjuk, hogy a gyakorlatban a betétek és a hitelek kamatszámítási módja eltérő.

A *nominális kamatozás* (névleges vagy egyszerű kamatozás) során a kiinduló összeg (az alaptőke) bizonyos százalékban kifejezett hányadát szabályos időközönként (*kamatperiódus*) hozzáadják a tőkéhez. Ezt a százalékot kamatlábnak nevezzük.

A banki hirdetésekből ismert *EBKM* (egységesített betéti kamatláb mutató) is a nominális kamatozás módszerével számítódik. Ennek a bankok részéről praktikus oka, hogy az éves nominális kamatból számított egy évnél rövidebb távra szóló kamat magasabb, mint éven belül az ún. *effektív hozam* (*a kamatos kamat*), így az ügyfeleknek többnek tűnhet.

Számítási módja: $V_t = V_0\left(1 + t\frac{p}{100}\right)$, ahol V_0 a kezdőtőke, t a futamidő a kamatperiódusok számában kifejezve, p a kamatláb és V_t a tőke a futamidő végén. *Nominális kamatozás* esetén a kamatperiódusok végén kapott összegek *számtani sorozat*ot alkotnak.

Az effektív hozam (kamatos kamat) számításánál a kamatperiódus végén a kamatot nem fizetik ki, hanem hozzáadják a tőkéhez, és ez a következő időszakban többletkamatot eredményez, így a kapott kamat is kamatozik. A kamatjóváírás a gyakorlatban legtöbbször többévente, évente, vagy havonta történik.

A gyakorlatban a bankok a betéti kamatot a kamatoskamat-számítás szerint számolják.

Hitelfelvétel esetén a *THM*-et (*teljes hiteldíj mutató*) is jellemzően a kamatos kamat módszerével számolják ki.

Számítási módja: $V_t = V_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$, ekkor a kamatperiódusok végén kapott összegek olyan, 0-dik taggal kezdődő mértani sorozatot alkotnak, amelyben $q = 1 + \frac{p}{100}$.

(*Megjegyzés*: A kamaton kívül az *EBKM* és a *THM* is tartalmaz (pozitív, illetve negatív előjellel) további összetevőket: kezelési költség, hitelbírálati díj, kamatadó stb. Továbbá az infláció is csökkenti pénzünk értékét, ezért befektetés esetén célszerűbb az ún. *reálkamat*tal számolnunk – ez akár *negatív* is lehet.)

Járadékszámítás

Az egyenlő időközökben fizetett összegek sorozatát járadéknak nevezzük. Az egyszerűség érdekében feltételezzük, hogy:

- a befizetési időközök megegyeznek a kamatperiódussal,
- minden alkalommal ugyanakkora összeget fizetünk be.

Ha a *kamatperiódus egy év*, akkor az egy-egy alkalommal befizetett összeget *annuitás*nak nevezzük.

Kétféle járadékfizetést vizsgálunk:

- gyűjtőjáradék: ekkor a bankba befizetett összegekkel pénzgyűjtés a cél,
- törlesztőjáradék: ekkor a fennálló tartozást akarjuk kiegyenlíteni (hiteltörlesztés).

Gyűjtőjáradék:

n éven át minden év elején befizetünk a összeget, az éves kamatláb legyen p. Az utolsó befizetés után egy évvel felvehető pénzösszeget jelöljük S_n-nel, $q := 1 + \frac{p}{100}$. Ekkor

Periódusidő	Tőke a periódusidő elején	Tőke a periódusidő végén
1.	a	$S_1 = aq$
2.	$S_1 + a$	$S_2 = (aq + a)q = aq^2 + aq$
3.	$S_2 + a$	$S_3 = (aq^2 + aq + a)q = aq^3 + aq^2 + aq$
…		
n.	$S_{n-1} + a$	$S_n = (aq^{n-1} + aq^{n-2} +\ldots+ aq + a)q = aq^n + aq^{n-1} +\ldots+ aq^2 + aq$

Vegyük észre, hogy az utolsó összeg egy olyan mértani sorozat első n tagjának összege, ahol $a_1 = aq$, a hányados pedig q, emiatt $S_n = aq\frac{q^n - 1}{q-1} = a\left(1+\frac{p}{100}\right)\frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1}{\frac{p}{100}}$.

Törlesztőjáradék:

t hitelt vettünk föl n év futamidővel, az éves kamatláb legyen p. A törlesztés minden év végén esedékes, összege legyen A, $q := 1+\frac{p}{100}$. Ekkor:

Periódusidő	Hitel a periódusidő elején	Hitel a periódusidő végén (a törlesztés után)
1.	t	$t_1 = tq - A$
2.	t_1	$t_2 = (tq - A)q - A = tq^2 – Aq - A$
3.	t_2	$t_3 = (tq^2 - Aq - A)q - A = tq^3 - Aq^2 - Aq - A$
…		
n.	t_{n-1}	$t_n = (tq^{n-1} - Aq^{n-2} -\ldots- Aq - A)q - A = tq^n - Aq^{n-1} -\ldots- Aq^2 - Aq - A$

Az n-szeri törlesztés után kamatostól visszafizettük a felvett hitelt, tehát $t_n = 0$. Így

$$t_n = tq^n - Aq^{n-1} - Aq^{n-2} - \ldots - Aq - A = 0\text{, ahonnan}$$

$$tq^n = Aq^{n-1} + Aq^{n-2} + \ldots + Aq + A.$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldalon álló összeg egy olyan mértani sorozat első n tagjának összege, ahol $a_1 = A$, a hányados pedig q. Így

$$tq^n = A\frac{q^n - 1}{q-1}\text{, amelyből}$$

$$A = tq^n\frac{q-1}{q^n-1} = t\left(1+\frac{p}{100}\right)^n\frac{\frac{p}{100}}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1}$$

Exponenciális folyamatok a társadalomban és a természetben

Napjaink egyik legnagyobb társadalmi problémája a Föld népességének várható exponenciális gyarapodása. Az emberiség hosszú történelme során 1800 körül érte csak el az egymilliárd főt, ennek a megduplázódására viszont már csak 130 évre volt szükség – 1930-ra a népesség kétmilliárd, 1959-re már 3 milliárd fő volt, majd a rohamos növekedés eredményeképp 2011-re a 7 milliárd főt is elérte; ma körülbelül 7,5 milliárd ember él a Földön. Az ENSZ becslései alapján a 8 milliárd főt 2024 tavaszán, a 10 milliárd főt pedig 2056-ban éri majd el az emberiség. Különösen erős ez a folyamat Afrikában, ahol ma kb. 1,2 milliárd fő él, míg 2056-ban már várhatóan 2,7 milliárd. Ázsiában (különös tekintettel Kínára)

kicsit mérséklődött a növekedési ütem, de még itt is jelentős növekedés várható: a mai 4,5 milliárdról várhatóan 5,3 milliárdra gyarapszik. Ezt nem képes ellensúlyozni Európa negatív növekedési üteme, lakosságcsökkenése.

Hasonló exponenciális folyamat jellemzi a hírek terjedését (például a Facebookon), egy járvány lefolyását, az MLM típusú üzleteket vagy egy ország GDP-jének és az ott várható élettartamnak a kapcsolatát.

A biológiában ilyen a például a baktériumok szaporodása vagy a növények növekedése, a kémiában az oldódások időbeli lezajlása, a fizikában a radioaktív anyagok bomlása, az atombombában a neutronok számának növekedése stb.

Természetesen ezek a társadalmi és természeti folyamatok nem tisztán exponenciálisak, hiszen a peremfeltételek korlátozzák, fékezik a változásokat.

(*Megjegyzés*: Ez a tétel azért lett ilyen hosszú, mert a járadékok levezetésével együtt *három tételt bizonyítottunk*. A két járadékképletet végül is meg lehet jegyezni…)

11. tétel: Függvények lokális és globális tulajdonságai. A differenciálszámítás és alkalmazásai.

A *függvény* a matematika legfontosabb fogalmai közé tartozik.

D: Adott két (nem feltétlenül különböző) halmaz, *A* és *B*. Azokat az *egyértelmű hozzárendelés*eket, amelyek az *A* halmaz elemeihez a *B* halmaz elemeit rendelik, *függvény*eknek nevezzük. Az *A* halmaz a függvény alaphalmaza, a *B* pedig a képhalmaza. Az *A* halmaz azon részhalmazát, amely elemeihez ténylegesen történik hozzárendelés, *értelmezési tartomány*nak (*D*), a *B* halmaz azon részhalmazát, amelynek elemei ténylegesen hozzárendelődnek, *értékkészlet*nek (*R*) nevezzük.

Jelben: $f: D \to R \qquad x \mapsto f(x)$.

D: Két függvényt akkor tekintünk egyenlőnek, ha értelmezési tartományuk ugyanaz, és a közös értelmezési tartomány minden egyes *x* eleméhez a két függvény ugyanazt az értéket rendeli.

A függvényeket a következő szempontok szerint jellemezzük (célszerűen ebben a sorrendben):

- értelmezési tartomány;
- értékkészlet (*ezt általában a szélsőértékek, korlátosság vizsgálata után utólag írjuk be*);
- zérushelyek;
- szélsőértékek (korlátosság, határértékek a $\pm\infty$-ben, illetve a szakadási pontokban);
- paritás;
- periodikusság;
- növekedési viszonyok (monotonitás, függvény menete);
- függvénygörbe alakja (konvexitás, inflexiós pontok);
- folytonosság.

A *globális tulajdonságok* közé soroljuk azokat, amelyek a teljes értelmezési tartományra vonatkoznak (értelmezési tartomány, értékkészlet, korlátosság, paritás, periodikusság, folytonosság), a többit pedig a *lokális tulajdonságok* közé soroljuk.

Ebben a tételben nem feladatunk minden egyes tulajdonság meghatározása, példaként azért egyet definiálok.

D: Az *f* függvény periodikus, ha $\exists p \in \mathbb{R}^+$, *hogy* $\forall x \in D_f$ *esetén* $x + p \in D_f$, *és* $f(x+p) = f(x)$. A legkisebb ilyen *p* pozitív valós számot (*ha létezik*) a függvény periódushosszának nevezzük. (*Más definíciók bármely fenti tulajdonságú p-t periódushossznak tekintenek.*)

A differenciálszámítás (deriválás)

A 17. században, egymástól függetlenül *Isaac Newton* és *Gottfried Wilhelm Leibniz* dolgozta ki a differenciálszámítás (és ezzel párhuzamosan az *integrálszámítás*) alapjait, elsősorban a fizika által felvetett problémák (változó mozgások leírása stb.) megoldására. A ma használatos jelöléseket Leibniznek köszönhetjük, míg a megközelítés módját inkább Newtonnak. A „végtelenül kicsiny" mennyiségekkel való számolás alapjait két görög matematikus, *Eudoxosz* (a „*kimerítés*" módszere) és *Archimédesz* (*kétoldali közelítés*) vetette meg, és alkalmazta sikerrel. A Newton és Leibniz által kidolgozott eljárás több szempontból is hiányos volt (*határérték-számítás*, *folytonosság* stb.), csak a

19. században dolgozták ki pontosan, itt elsősorban *Augustin Cauchy* és *Georg Friedrich Bernhard Riemann* nevét és munkásságát kell megemlíteni.

A Newton és Leibniz számára legfontosabb kérdések a következők voltak:

1. Mit értsünk egy görbe adott pontján átmenő érintőjén?
2. Hogyan számolható ki egy síkidom területe?
3. Hogyan oldjunk meg szélsőérték-problémákat?

Az érintőprobléma megoldása lényegében egy függvény adott helyen vett határértékének meghatározására vezethető vissza.

D: Legyen az *f* függvény az x_0 pont valamely környezetében értelmezve. Ha az $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ún. *különbségi* (*differencia-*) *hányados függvény*nek létezik határértéke az x_0 helyen, akkor az *f* függvényt az x_0 pontban *differenciálható*nak nevezzük. A $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ határértéket az *f* függvény x_0 pontbeli *differenciálhányados*ának (*derivált*jának) nevezzük. Jelölése $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

A differenciálhatóság egyik legfontosabb következménye:

T: Ha az *f* függvény differenciálható x_0-ban, akkor *f* folytonos is x_0-ban.

A differenciálhányados segítségével tudjuk értelmezni az érintő fogalmát:

D: Legyen az *f* függvény differenciálható az x_0 pontban. A függvény grafikonjának az $(x_0;f(x_0))$ ponthoz tartozó érintőjén az $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ egyenletű egyenest értjük.

A pontbeli derivált segítségével tudjuk értelmezni egy függvény *deriváltfüggvény*ét:

D: Az *f* függvény *deriváltfüggvény*ének (*differenciálhányados-függvény*ének) nevezzük azt az *f'* függvényt, amely értelmezve van azokon az x_0 helyeken, ahol *f* differenciálható, és ott az értéke $f'(x_0)$.

Továbbá:

D: Az *f* függvény *második deriváltfüggvény*ének nevezzük az *f'* függvény deriváltfüggvényét, amennyiben létezik, jele *f''*.

Például a gyorsulást az út-idő függvény második deriváltjaként tudjuk meghatározni.

Ezt az eljárást folytatva további deriváltfüggvényeket tudunk definiálni.

Deriválási szabályok

Csak néhány a legfontosabb szabályokból (a *képlettár*ban is megtalálhatók):

$(c\cdot f)'=c\cdot f'$, *ahol* $c\in\mathbb{R}$; $\qquad (f\pm g)'=f'\pm g'$;

$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$; $\qquad \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$, *ha* $g\neq 0$;

$(f(g))'=f'(g)\cdot g'$.

Néhány elemi függvény deriváltfüggvénye:

$$(c)' = 0 \ (c \in \mathbb{R}); \qquad (x^n)' = n \cdot x^{n-1};$$

$$(e^x)' = e^x; \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(\sin x)' = \cos x; \qquad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

A fentiek közül az egyiket választottam a témához tartozó bizonyításnak:

Tétel: Az $f(x) = x^n$, $D_f = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ függvény deriváltfüggvénye $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Bizonyítás: A bizonyításban felhasználom az $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + a^{n-i}b^{i-1} + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$ azonosságot.

Az x^n függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosára:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + ... + x^{n-i} \cdot x_0^{i-1} + ... x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + ... + x^{n-i} \cdot x_0^{i-1} + ... x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = n \cdot x_0^{n-1}.$$

Mivel ez bármely $x_0 \in D_f$ esetén teljesül, ezért $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. **//**

A differenciálszámítás alkalmazásai

A matematikán belül a legfontosabb alkalmazási területeket korábban már felsoroltam (görbe érintője egyenletének felírása, függvényvizsgálat, szélsőérték-feladatok megoldása).

Néhány nagyon fontos tétel a függvények tulajdonságainak meghatározásával kapcsolatban:

T: Ha az *f* függvény differenciálható az]*a*; *b*[nyílt intervallumon, továbbá az $a < x_0 < b$ pontban $f'(x_0) = 0$, és *f'* x_0-ban előjelet vált, akkor *f*-nek x_0-ban *helyi szélsőértéke* van: helyi maximuma, ha *f'* előjele pozitívról negatívra változik, helyi minimuma, ha az előjel negatívról pozitívra változik.

T: Ha az *f* függvény kétszer differenciálható az]*a*; *b*[nyílt intervallumon, továbbá az $a < x_0 < b$ pontban $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$, akkor *f*-nek x_0-ban helyi maximuma van, ha $f''(x_0) > 0$, akkor *f*-nek x_0-ban helyi minimuma van.

T: Legyen az *f* függvény kétszer differenciálható az]*a*; *b*[nyílt intervallumon. Az *f* pontosan akkor konvex (konkáv) az]*a*; *b*[-n, ha $f''(x_0) \geq 0$ ($f''(x_0) \leq 0$) bármely $x_0 \in]a;b[$ esetén.

T: Ha az x_0 pontban $f''(x_0)$ előjelet vált, akkor ott *f*-nek inflexiós pontja van.

A matematikán kívüli alkalmazások (fizika, kémia, biológia, pénzügyi számítások, közgazdaságtan, társadalmi folyamatok leírása stb.) közös jellemzője, hogy általában valamilyen *folyamat változási gyorsaságá*nak meghatározására használjuk.

Csak néhány konkrét példa ezek közül: a pillanatnyi sebesség és gyorsulás kiszámítása; a kémiai reakciók hőmérsékletfüggése; egy populáció dinamikus egyensúlyának meghatározása; költség-haszon elemzések, optimalizálási problémák megoldása; társadalmi folyamatok vizsgálata, időbeli előrejelzése stb.

12. tétel: Derékszögű háromszögekre vonatkozó tételek. A hegyesszögek szögfüggvényei. A szögfüggvények általánosítása.

Ez a tétel az egyik legkegyetlenebb a 24-ből, de csak a mérete miatt – és ezzel a vizsgáztatók is tisztában vannak. Ne is törekedjünk arra, hogy minden idetartozó definíciót és tételt elmondjunk, ellenben ügyeljünk arra, hogy a tétel mind a három fő részét érintsük feleletünkben.

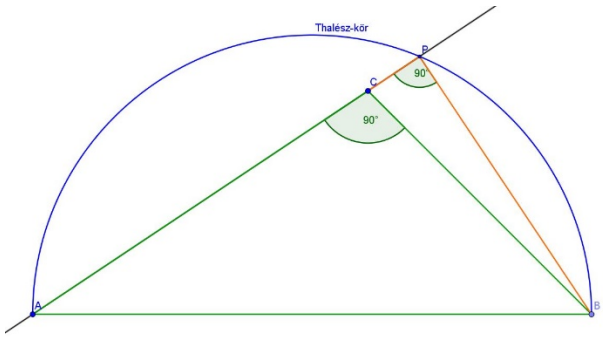
D: A derékszögű háromszögben a derékszög szárait *befogó*nak, a vele szemközti oldalt *átfogó*nak nevezzük.

A derékszögű háromszögekre vonatkozó legfontosabb tételek:

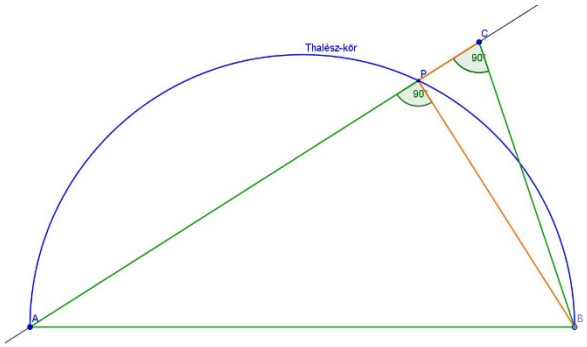
1. **Pitagorasz tétele**: A derékszögű háromszög befogóinak négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével.
2. **Pitagorasz tételének megfordítása**: Ha egy háromszög két oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.
3. **Thalész tétele**: Ha egy kör egyik átmérőjének két végpontját összekötjük a körvonal átmérővégpontoktól különböző bármely más pontjával, akkor derékszögű háromszöget kapunk.
4. **Thalész tételének megfordítása**: Az azonos átfogójú derékszögű háromszögek derékszögű csúcsai az átfogó mint átmérő fölé szerkesztett körre illeszkednek (Thalész-kör).
5. **Magasságtétel**: A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága két olyan részre vágja az átfogót, amelyeknek mértani közepe.
6. **Befogótétel**: A derékszögű háromszög befogója mértani közép az átfogó és a befogó átfogóra eső merőleges vetülete között.

Ezek közül itt a kedvencemet, Thalész tételének megfordítását fogom bizonyítani.

Bizonyítás: Indirekt úton bizonyítunk. Tegyük föl, hogy a derékszögű csúcs nem illeszkedik az átfogó Thalész-körére. Ekkor két eset lehet: vagy annak belsejében, vagy azon kívül helyezkedik el.

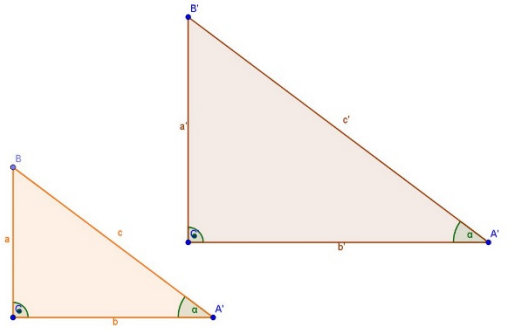


Ha a derékszögű csúcs a Thalész-kör belsejében van, akkor hosszabbítsuk meg a háromszög *AC* befogóját a Thalész-körrel való *P* metszéspontjáig. Az ábra jelölései szerint ekkor Thalész tétele miatt $BPA\sphericalangle = 90^\circ$, ugyanakkor a $PCB\sphericalangle$ is derékszög ($BCA\sphericalangle$ külső szöge lévén), de ez ellentmondásra vezet, ugyanis így a $BPC\Delta$ belső szögeinek összege nagyobb lenne 180°-nál.



Ha a derékszögű csúcs a Thalész-körön kívül van, akkor legyen a háromszög *AC* befogójának a Thalész-körrel való metszéspontja *P*. Az ábra jelölései szerint ekkor Thalész tétele miatt $BPA\sphericalangle = 90^\circ$, ugyanakkor a $CPB\sphericalangle$ is derékszög ($BPA\sphericalangle$ külső szöge lévén), de ez ellentmondásra vezet, ugyanis így a $BPC\Delta$ belső szögeinek összege nagyobb lenne 180°-nál. **//**

A hegyesszögek szögfüggvényei



Legyen az *ABC* és az *A'B'C'* derékszögű háromszögekben egy-egy hegyesszög (α) egyenlő.

Emiatt a két háromszög hasonló, a hasonlóság aránya $k = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

Ebből következik, hogy $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$; $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$; $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$, azaz az egyenlő hegyesszögű derékszögű háromszögek oldalainak hányadosa állandó, és ez az állandó a derékszögű háromszög hegyesszögére jellemző. Ezen hányadosokkal tudjuk definiálni a hegyesszögek szögfüggvényeit:

$$\sin\alpha = \frac{\textit{szöggel szemközti befogó}}{\textit{átfogó}} \qquad \cos\alpha = \frac{\textit{szög melletti befogó}}{\textit{átfogó}}$$

$$tg\alpha = \frac{\textit{szöggel szemközti befogó}}{\textit{szög melletti befogó}} \qquad ctg\alpha = \frac{\textit{szög melletti befogó}}{\textit{szöggel szemközti befogó}}$$

(A szinusz reciprokát a szög *szekáns*ának, a koszinuszét a szög *koszekáns*ának nevezzük, de ezeket nem használjuk középiskolában.)

Nyilvánvalóan igazak a következő egyenlőségek:

$$\sin\left(90^\circ - \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \cos\left(90^\circ - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$tg\left(90^\circ - \alpha\right) = ctg\alpha \qquad ctg\left(90^\circ - \alpha\right) = tg\alpha$$

$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

A Pitagorasz-tétel segítségével levezethető a következő tétel:

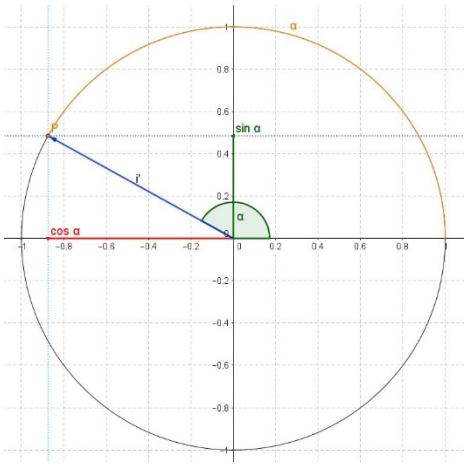
T: Bármely α hegyesszögre $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. (Ez az ún. *trigonometrikus Pitagorasz-tétel*.)

Az egyenlő szárú derékszögű háromszögből és egy „fél" szabályos háromszögből levezethetők az ún. nevezetes szögek (30°, 45° és 60°) szögfüggvényeinek, illetve a szögfelezőtétel felhasználásával ezek félszögei szögfüggvényeinek pontos értékei.

A szögfüggvények általánosítása

A *szög* fogalmának eredeti meghatározása szerint a szögek nagysága 0° és 360° közé esik, célszerűnek tűnt ezek szögfüggvényeinek értelmezése is, majd – elsősorban fizikai feladatok megoldására – értelmeztük a *forgásszög*et, illetve ezek szögfüggvényeit, természetesen a permanencia elvének figyelembe vételével.

D: Az **i** egységvektor α szögű elforgatottjának első koordinátáját a szög koszinuszának, második koordinátáját a szög szinuszának nevezzük.



A definícióból következik, hogy bármely α szögre $-1 \le \sin\alpha, \cos\alpha \le 1$, továbbá ekkor is igaz a trigonometrikus Pitagorasz-tétel.

A szöget mérhetjük fokban és radiánban is.

A tangens és kotangens szögfüggvényt a szinusz és koszinusz szögfüggvények segítségével értelmezzük.

D: Bármely $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in Z$ esetén $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

D: Bármely $\alpha \neq 0^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in Z$ esetén $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Alkalmazások:

Talán a derékszögű háromszögekre és a hegyesszögek szögfüggvényeire vonatkozó összefüggéseket alkalmazzuk leggyakrabban a hétköznapi életben: különböző testek felszínének és térfogatának meghatározása (pl. családi házak vakolásához és festéséhez); távolságok és magasságok meghatározása teodolit segítségével. A műszaki mechanikában hajtószíjak hosszának meghatározása, gépelemek illesztése, a „vinkli” meghatározása vágásokhoz stb. tartozik ezek közé. De különböző fizikai problémák megoldásában is használjuk: a ferde hajítás hosszának és magasságának kiszámításához (ideértve a katonai alkalmazásokat is), a munkavégzés kiszámításához, a lejtőre tett testek mozgásának leírásához.

13. tétel: Háromszögek nevezetes vonalai, pontjai és körei.

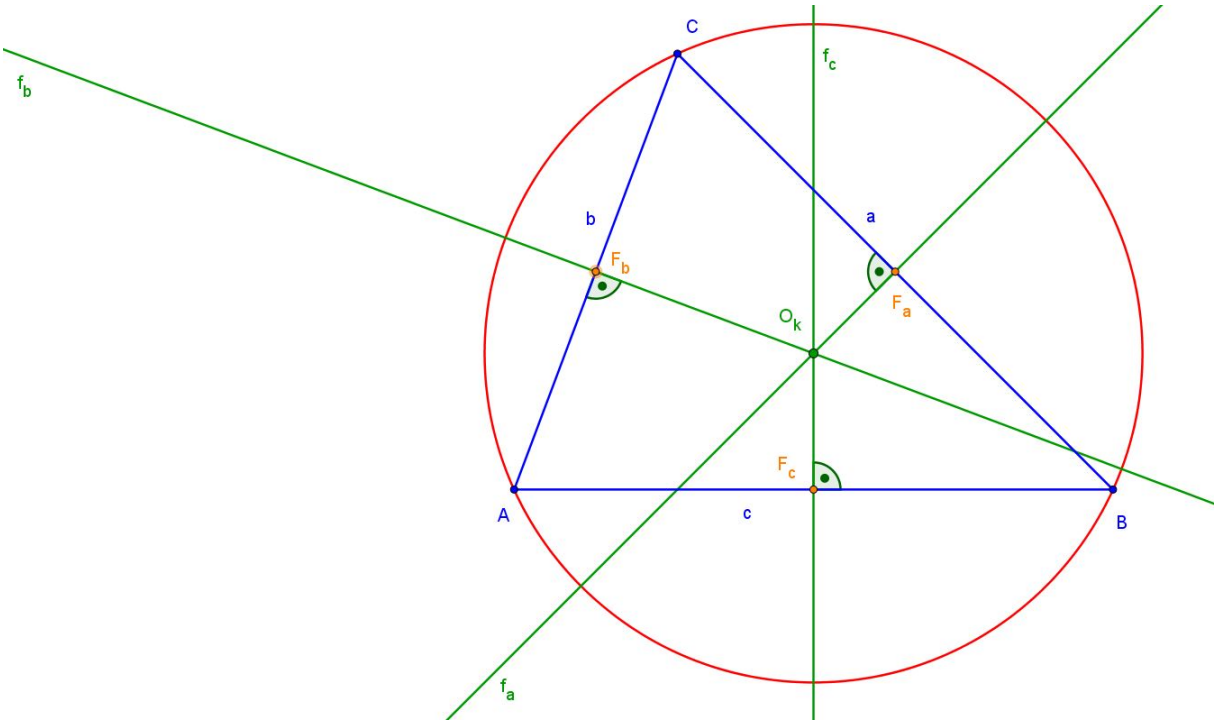
Az $ABC\Delta$-ben a szokásos jelölésekkel a legfontosabb pontok, egyenesek és körök:

- a Δ csúcspontjai: A; B és C;
- a Δ csúcsaival szemközti oldalak: a; b és c;
- a Δ belső és külső szögei: α; β és γ; illetve α'; β' és γ';
- a Δ oldalfelező pontjai: F_a; F_b és F_c;
- a Δ oldalfelező merőlegesei: f_a; f_b és f_c;
- a Δ oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja: O_k;
- a Δ belső és külső szögfelezői: f_α; f_β és f_γ; illetve f'_α; f'_β és f'_γ;
- a Δ belső és külső szögfelezőinek metszéspontjai: O_{be}; O_{ka}; O_{kb} és O_{kc};
- a Δ magasságvonalai (illetve magasságai): m_a; m_b és m_c;
- a Δ magasságtalppontjai: T_a; T_b és T_c;
- a Δ magasságpontja: M;
- a Δ középvonalai: k_a; k_b és k_c;
- a Δ súlyvonalai: s_a; s_b és s_c;
- a Δ súlypontja: S.

Az ezekhez kapcsolódó legfontosabb definíciók, tételek:

D: A Δ köré írt (körülírt vagy körülírható) köre az a kör, amely a Δ összes csúcsán átmegy.

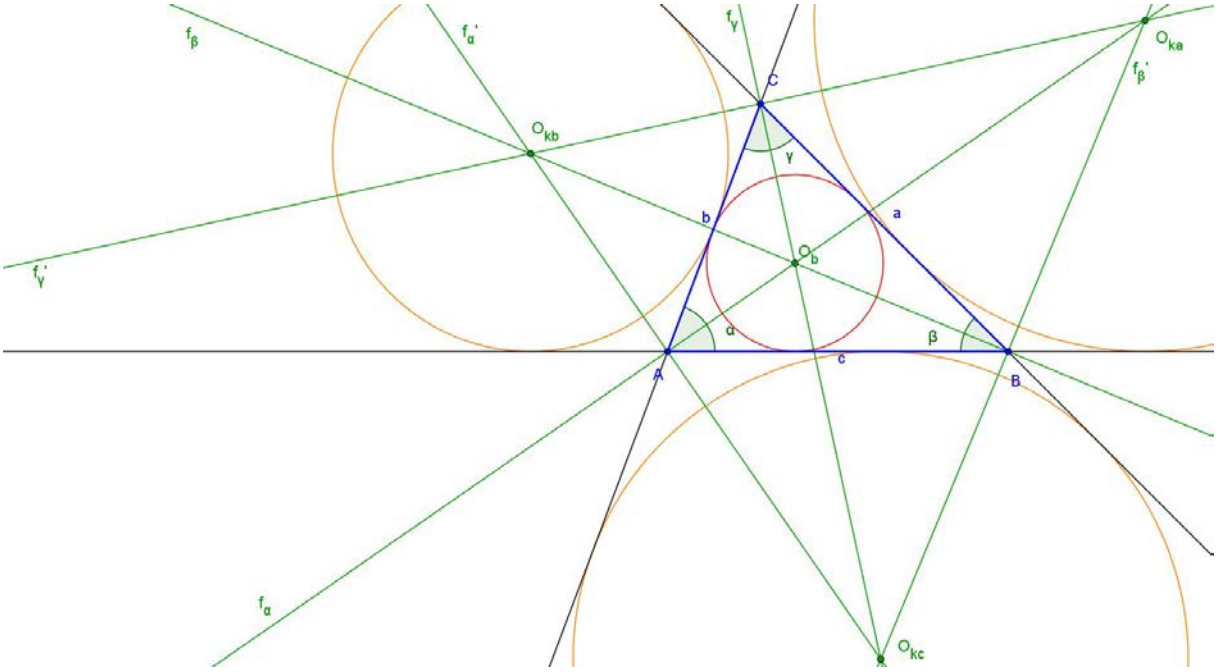
T: A Δ oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást. Ez a pont a Δ köré írható körének középpontja.



A hegyesszögű Δ köré írt körének középpontja a Δ belsejében, a tompaszögűé a Δ-ön kívül van, míg a derékszögű Δ köré írt köre a Δ Thalész-köre, az átfogó két végpontjával együtt.

D: A Δ beírt köre vagy a Δ-be írt kör olyan kör, amely a Δ minden oldalát érinti.

D: A Δ hozzáírt köre a Δ egyik oldalát és a másik két oldalának a meghosszabbítását érintő kör.

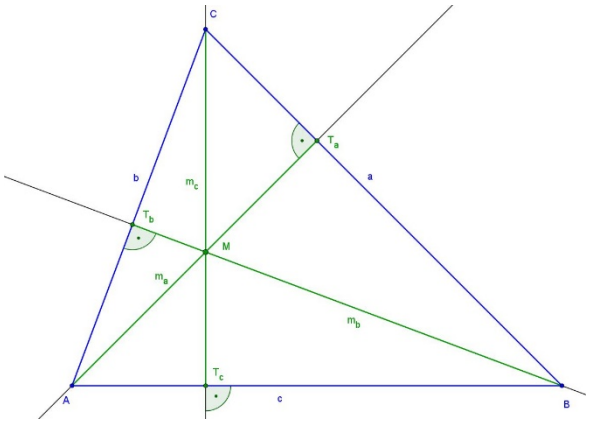


T: A Δ belső szögfelezői egy pontban metszik egymást. Ez a pont a Δ beírható körének középpontja.

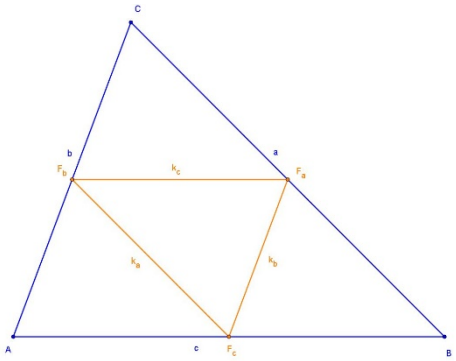
T: A Δ egy belső szögének és a másik két szöge külső szögének szögfelezője egy pontban metszi egymást. Ez a pont a Δ-höz kívülről hozzáírható kör középpontja (három ilyen pont van).

D: A Δ magasságvonalán a háromszög egyik csúcsából a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőleges egyenest értjük. A Δ adott oldalának és az azzal szemközti csúcsának a távolsága a Δ adott oldalához tartozó magassága. A magasságvonal és az oldal egyenesének metszéspontját a magasság talppontjának nevezzük.

T: A Δ magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont a Δ magasságpontja.



A hegyesszögű Δ magasságpontja a Δ belsejében, a tompaszögűé a Δ-ön kívül van, míg a derékszögű Δ magasságpontja a derékszögű csúcs.



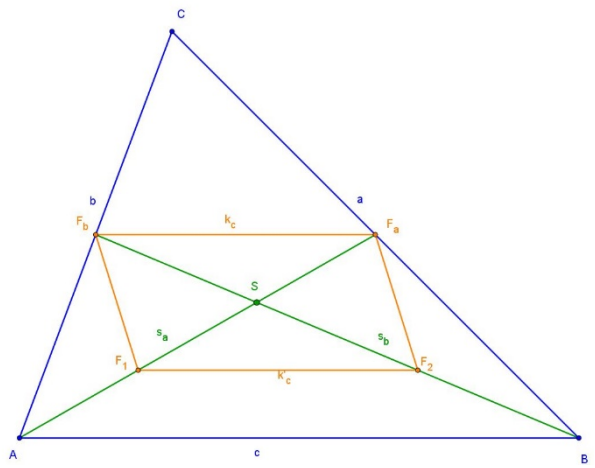
D: A Δ két oldalának felezőpontját összekötő szakaszt a háromszög középvonalának nevezzük.

T: A Δ középvonala párhuzamos a harmadik oldallal, és fele olyan hosszú.

D: A Δ csúcspontjait a szemközti oldal felezőpontjaival összekötő szakaszokat (illetve egyeneseket) a Δ súlyvonalainak nevezzük.

T: A Δ súlyvonalai egy pontban metszik egymást, ez a pont a háromszög súlypontja. A súlypont a súlyvonalakat úgy harmadolja, hogy az oldalakhoz van közelebb.

Bizonyítás: E tétel bizonyítását többféleképpen tanultuk középiskolában: hasonlósági, vektoros, koordinátageometriai módszerekkel is beláttuk. Én most egy egybevágósági bizonyítást adok.



HÁJ! Legyen S az ABC Δ s_a és s_b súlyvonalának metszéspontja, F_1 az AS, F_2 a BS szakasz felezőpontja.

Az F_bF_a szakasz az ABC Δ háromszög c oldalához tartozó középvonala, ezért párhuzamos vele és fele akkora. Az ABS Δ háromszögben ugyanilyen oknál fogva F_1F_2 is párhuzamos c-vel és fele akkora.

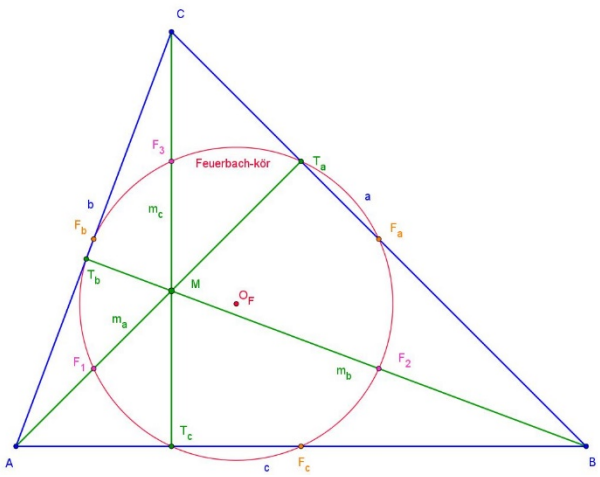
Lévén az $F_1F_2F_aF_b$ négyszög két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő hosszú, ezért az paralelogramma.

Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, ezért $AF_1 = F_1S = SF_a$, illetve $BF_2 = F_2S = SF_b$. Tehát S mindkét súlyvonalat a tételben szereplő módon harmadolja.

A Δ s_a és s_c súlyvonalának S' metszéspontjára alkalmazva az előbbi eljárást, ugyanezt kapjuk, emiatt $S' = S$, tehát a három súlyvonal egy pontban metszi egymást, és ez mindhármat a tételben szereplő módon harmadolja. **//**

Néhány további nevezetes tétel ehhez kapcsolódóan

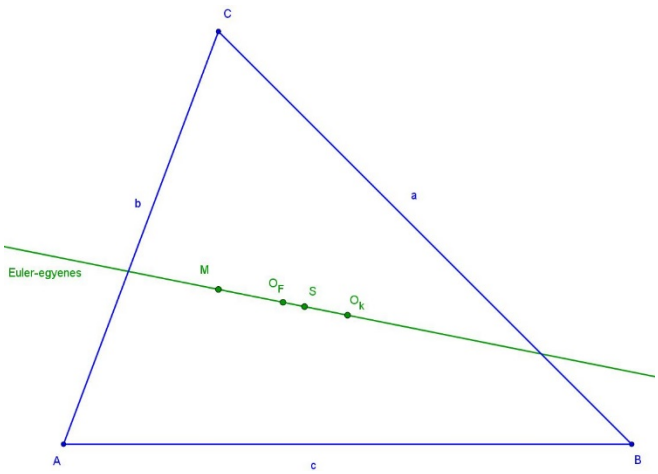
T: Bármely Δ-ben az oldalak felezőpontjai, a magasságok talppontjai és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai egy körre illeszkednek (*kilenc pont köre* vagy *Feuerbach-kör*).

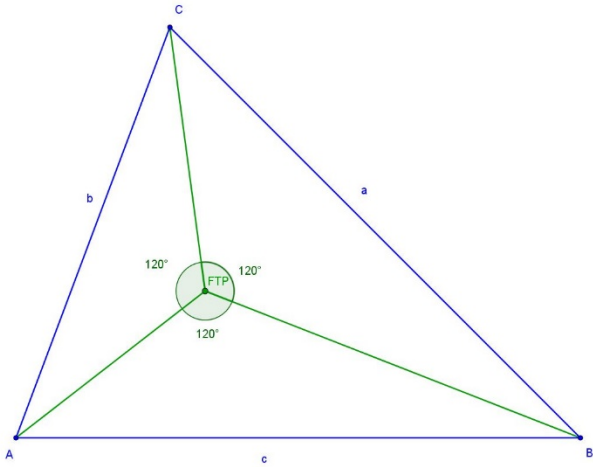


A Feuerbach-kör néhány érdekes tulajdonsága:

(1) A Feuerbach-kör sugara feleakkora, mint a háromszög körülírt körének a sugara.
(2) A háromszög körülírt körének bármely pontját a magasságponttal összekötő szakasz felezőpontja rajta van a Feuerbach-körön.
(3) A Feuerbach-kör középpontja rajta van a háromszög *Euler-egyenes*én, és felezi a háromszög magasságpontja és a körülírt kör középpontja közötti szakaszt.
(4) A Feuerbach-kör kívülről érinti a háromszög hozzáírt köreit és belülről érinti a beírt körét (Feuerbach-tétel).

T: Bármely Δ-ben a magasságpont, a körülírt kör középpontja, a súlypont és a Feuerbach-kör középpontja egy egyenesre illeszkedik (*Euler-egyenes*). A Feuerbach-kör középpontja felezi, a súlypont pedig 1 : 2 arányban osztja a körülírt kör középpontját és a magasságpontot összekötő szakaszt.





D: A Δ *izogonális pont*ja (*Fermat–Torricelli-pont*ja) az a pont, amelyet a Δ csúcsaival összekötve az összekötő szakaszok együttes hossza minimális.

T: Ha egy Δ-ben a legnagyobb szög kisebb mint 120°, akkor a Δ izogonális pontja az a pont, amelyből a Δ minden oldala 120°-os szögben látszik, ellenkező esetben az izogonális pont a legnagyobb szög csúcsa.

Alkalmazások:

A Δ-ek nevezetes pontjait, egyeneseit és köreit legtöbbször geometriai bizonyításokban és szerkesztésekben használjuk föl.

Például magát a magasságvonalak metszéspontjára vonatkozó tételt is a háromszögek oldalfelező egyeneseire vonatkozó tétel felhasználásával látjuk be, koordinátageometriai feladatok során is számtalanszor használjuk. Bizonyos szélsőérték-feladatok megoldása során is hivatkozunk rájuk.

Épületek, gépek tervezése során is sokszor hívjuk segítségül ezeket.

14. tétel: Összefüggések az általános háromszögek oldalai között, szögei között, oldalai és szögei között.

A háromszög oldalai közti összefüggések

A háromszög oldalai közti legalapvetőbb összefüggést a *háromszög-egyenlőtlenség*ek jelentik.

T: Bármely háromszögben két oldal összege nagyobb, mint a harmadik oldal, illetve bármely két oldal különbsége kisebb, mint a harmadik oldal.

A szokás jelölésekkel: $a+b>c$; $b+c>a$; $c+a>b$; $|a-b|<c$; $|b-c|<a$ és $|c-a|<b$.

A háromszög szögei közti összefüggések

D: A háromszög belső szögeinek mellékszögeit külső szögnek nevezzük.

T: A háromszög bármely külső szöge a nem mellette fekvő belső szögek összege.

T: A háromszög belső szögeinek összege 180°.

T: A háromszög külső szögeinek összege 360°.

Ez utóbbi három tétel bizonyítása a nevezetes szögpárokra épül, és a leggyakrabban használt tételek közé tartozik (ha nem is mindig hivatkozunk rájuk).

Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között

E tételek két csoportba sorolhatók: kvalitatív és kvantitatív összefüggéseket fogalmaznak meg.

Kvalitatív megállapítások:

T: Bármely háromszögben egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak, és fordítva, egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak vannak.

T: Bármely háromszögben a nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, és fordítva, nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van.

E négy tételt szintén gyakran használjuk, különösen trigonometrikus feladatok megoldása során. Fenti megfogalmazásuk rövid, de matematikailag helyes. Amennyiben *ha A, akkor B* alakban szeretnénk kimondani ezeket, akkor például az első így szólna:

***T**: Ha egy háromszögben két oldal egyenlő hosszú, akkor a velük szemközti szögek egyenlő nagyságúak, és fordítva, ha egy háromszögben két szög egyenlő nagy, akkor a velük szemközti oldalak egyenlő hosszúak.*

E tételek csak a bennük szereplő mennyiségek nagyságrendi (minőségi) összefüggéseiről adnak felvilágosítást, a számszerű viszonyokról, a mennyiségi összefüggésekről nem. Ezeket a következő tételek mondják ki.

Kvantitatív megállapítások:

A trigonometrikus feladatokban leggyakrabban használt két tétel tartozik ide: a *szinusztétel* és a *koszinusztétel*.

Tétel: Bármely háromszögben az oldalak úgy aránylanak egymáshoz, mint a velük szemközti szögek szinuszai (szinusztétel). A szokásos jelölésekkel:

$$a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma \qquad \text{vagy} \qquad \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Bizonyítás: Írjuk föl a háromszög területét (két oldal szorozva a bezárt szög szinuszával és osztva kettővel) háromféleképpen!

$$t=\frac{ab\sin\gamma}{2}=\frac{bc\sin\alpha}{2}=\frac{ca\sin\beta}{2} \qquad /\cdot\frac{2}{abc}\neq 0$$

$$\frac{2t}{abc}=\frac{\sin\gamma}{c}=\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}$$

Mivel a tételben (és bizonyításban) szereplő összes mennyiség pozitív, ezért vehetjük az egyenlet reciprokát, s így a tétel állítását kapjuk. **//**

T: Bármely háromszögben a szokásos jelölésekkel a koszinusztétel:

- oldalra felírva: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$;
- szögre felírva: $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

Természetesen bármely más oldalra és szögre analóg tételek igazak. (*Derékszögű háromszög esetén a Pitagorasz-tételt kapjuk.*)

Egy háromszög akkor adott, ha ismerjük három, egymástól független adatát (hosszak, szögek). Emiatt a legtöbb, háromszögre vonatkozó geometriai feladatban három adat ismeretében kell kiszámítanunk a háromszög további adatait. Ha az adott és a keresett mennyiségek két hosszúság és két szög, akkor a szinusztételt írjuk fel (célszerűen az ismeretlen mennyiséggel kezdve a bal oldali tört számlálójában), ha pedig három hosszúság és egy szög, akkor a koszinusztételt a szöggel szemközti oldalra.

Alkalmazások

A matematikán belüli alkalmazások mellett mind a mai napig rendkívül fontos és gyakran használt a gyakorlati életben a szinusz- és koszinusztétel.

Elsődleges alkalmazásuk a földmérésben és a térképészetben történik, annak ellenére, hogy ma már rendelkezésünkre állnak légi fényképek és GPS-koordináták. Ezt az magyarázza, hogy a polgári életben jelenleg ilyen célra használt műholdvevők pontossága sok esetben nem éri el a kellő szintet, 5-10 méteres hibahatárral dolgoznak. Speciális geodéziai GPS-eszközökkel (két különböző helyen lévő vevő stb.) el lehet érni az 1-2 centiméteres pontosságot is, de ezek igen drágák és nem is hozzáférhetők.

Közműalagutak, *megfelelő lejtésű* eső- és szennyvízelvezető *csatornák* tervezéshez és kivitelezéséhez a mai napig teodolitot használunk, és a mért adatokból *háromszögelés*sel határozzuk meg a keresett értékeket.

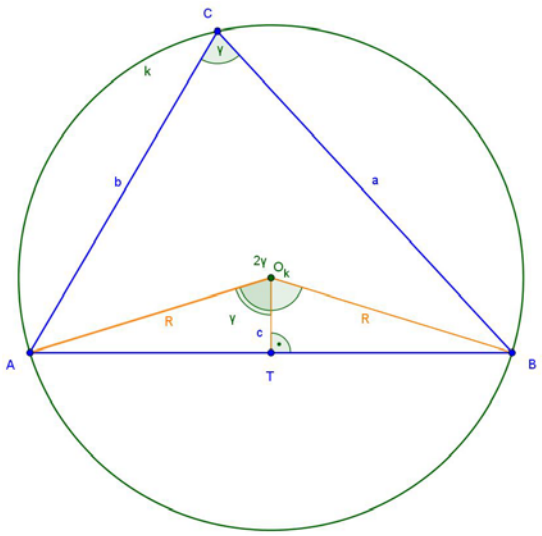
Ha elromlik – általában lemerül! – a GPS-ünk, az okostelefonunk, akkor még mindig ott van nekünk a térkép és a tájoló, hogy azok segítségével határozzuk meg a helyzetünk, illetve a követni kívánt irányt.

Megjegyzés

Ez a tétel a címe miatt tartalmilag igen kevés ismeretanyag elmondását teszi lehetővé. Ezen úgy lehet leginkább segíteni, ha több tételt is bizonyítunk, vagy ha egy tételre több bizonyítást is adunk. Erre egy példa:

Tétel: Bármely háromszögben az oldal és a vele szemközti szög szinuszának hányadosa állandó, a háromszög köré írt körének az átmérője (a szinusztétel egy, a korábban kimondottal ekvivalens alakja).

Bizonyítás: HÁJ!



Az $ABC\ \Delta$ köré írt körében a $BCA\sphericalangle = \gamma$ kerületi szög, ezért a kerületi és középponti szögek tétele miatt a hozzátartozó középponti szög $BO_kA\sphericalangle = 2\gamma$. Mivel az $ABO_k\ \Delta$ egyenlő szárú, ezért az AB oldalhoz tartozó magasság felezi az AB oldalt és a $BO_kA\sphericalangle$-et is. Így az ATO_k derékszögű Δ-ben $\sin\gamma = \frac{\frac{c}{2}}{R} = \frac{c}{2R}$,

amelyet rendezve $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

A másik két szögre hasonlóan bizonyítunk. **//**

E tétel fontos következménye, hogy a háromszög területét így is számolhatjuk:

$$t = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{ab\frac{c}{2R}}{2} = \frac{abc}{4R}.$$

15. tétel: Egybevágóság és hasonlóság. A hasonlóság alkalmazásai síkgeometriai tételek bizonyításában.

Egybevágóság

D: Azokat a függvényeket, amelyek értelmezési tartománya és értékkészlete is ponthalmaz, geometriai transzformációnak nevezzük. $\forall P \in D_f$ *esetén* $P \mapsto f(P) := P'$. *P*-t ősnek, *P'*-et képnek nevezzük.

Ezen függvények jellemzését – a számhalmazon értelmezett számértékű függvényektől eltérő módon – a következő szempontok szerint végezzük: *kölcsönös egyértelműség*, *szimmetria*, *fix-* és *invariáns alakzatok*, *távolság-*, *szög-* és *körüljárásiirány-tartás*. Ezek közül egyet definiálok:

D: Az *f* geometriai transzformáció szimmetrikus, ha $\forall P \in D_f$ *esetén* $f(f(P)) := P'' = P$.

A geometriai transzformációk közül kiemelkedően fontosak a távolságtartó leképezések.

D: A távolságtartó geometriai transzformációkat *egybevágósági transzformáció*nak nevezzük.

Ennek segítségével tudjuk meghatározni az *egybevágóság* fogalmát:

D: Két síkidom (test) egybevágó, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely egyiket a másikba viszi.

A síkbeli egybevágósági transzformációk öt alapesete: *tengelyes tükrözés*, *középpontos tükrözés*, *pont körüli forgatás*, *eltolás*, *identitás* (*azonos leképezés*).

Az utolsó négy előállítható két tengelyes tükrözés *szorzat*aként (*egymás utáni végrehajtása*ként). *Ez a szorzási művelet (általában) nem kommutatív!*

A térbeli egybevágósági transzformációk néhány alapesete: *középpontos tükrözés*, *tengelyes tükrözés*, *síkra való tükrözés*, *egyenes körüli elforgatás*, *eltolás*, *identitás*.

Néhány tétel az egybevágóságra:

T: Két kör (gömb) egybevágó, ha sugaruk egyenlő.

T: Két sokszög egybevágó, ha

- megfelelő oldalaik és átlóik páronként egyenlők; vagy
- megfelelő oldalaik és szögeik páronként egyenlők.

A gyakorlatban ez utóbbit nehézkessége miatt nem használjuk, célszerűen háromszögekre bontjuk őket, és azok egybevágóságát bizonyítjuk.

A háromszögek egybevágóságának alapesetei:

T: Két háromszög egybevágó, ha

- megfelelő oldalaik páronként egyenlők;
- két-két oldaluk és az azok által bezárt szögek páronként egyenlők;
- két-két oldaluk és a hosszabbakkal szemközti szögek páronként egyenlők;
- egy oldaluk és az azon fekvő két szög páronként egyenlő.

Hasonlóság

D: *Középpontos hasonlóság*nak nevezzük a következő geometriai transzformációt: Adott egy *O* pont és egy $\lambda \neq 0$ valós szám (a hasonlóság aránya). A tér minden egyes *P* pontjához rendeljünk hozzá egy *P'* pontot a következőképpen:

- ha *P* = *O*, akkor *P'* = *P*;
- ha $P \neq O$, akkor *P'* az *OP* egyenes azon pontja, amelyre $OP' = |\lambda| \cdot OP$, és ha $\lambda > 0$, akkor *P'* az *OP* félegyenes pontja, ha $\lambda < 0$, akkor *P*-t és *P'*-et *O* elválasztja egymástól.

D: Egy középpontos hasonlóság és egy egybevágósági transzformáció szorzatát (egymás utáni végrehajtását) *hasonlósági transzformáció*nak nevezzük.

D: Két síkidom (test) hasonló, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely egyiket a másikba viszi

Az egybevágóságnál írt tételek analógiái hasonlóság esetén:

T: Két kör (gömb) hasonló.

T: Két sokszög hasonló, ha

- megfelelő oldalaik és átlóik aránya páronként egyenlő; vagy
- megfelelő oldalaik aránya egyenlő, és megfelelő szögeik páronként egyenlők.

A háromszögek hasonlóságának alapesetei:

T: Két háromszög hasonló, ha

- megfelelő oldalaik aránya egyenlő;
- két-két oldaluk aránya és az azok által bezárt szögek egyenlők;
- két-két oldaluk aránya és a hosszabbakkal szemközti szögek egyenlők;
- két szögük páronként egyenlő.

További két fontos tétel:

T: Hasonló síkidomok területének (testek felszínének) aránya a hasonlóság arányának négyzete.

T: Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbe.

A hasonlóság alkalmazásai síkgeometriai tételek bizonyításában

A hasonlósági bizonyítást igénylő tételek legtöbbje jól felismerhető onnan, hogy a tétel állítása $a \cdot b = c \cdot d$ alakú, ahol *a*; *b*; *c* és *d* szakaszokat jelölnek (a mértani közepes tételek is ide tartoznak, lévén $a = \sqrt{b \cdot c} \Leftrightarrow a \cdot a = b \cdot c$).

A bizonyítások közös vonása, hogy megmutatjuk, a négy szakasz alkotta két háromszögben két-két szög páronként egyenlő. Emiatt a két háromszög hasonló, és ezért a megfelelő oldalak aránya megegyezik. Ezt átrendezve kapjuk a tétel állítását. Hogy melyik lesz a két hasonló háromszög, azt az $a \cdot b = c \cdot d$ állítás átrendezésével kapjuk: $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$, ahol *a* és *d* az egyik háromszög oldalai, és *c* és *b* a másik háromszög megfelelő (*egyenlő szögekkel szemközti*) oldalai.

A legfontosabb (legtöbbször használt) hasonlósági tételek a következők:

- a háromszögben a külső és belső szögfelezőkre vonatkozó *szögfelezőtétel*ek;
- pont körre vonatkozó hatványa (három eset a pont és a körvonal kölcsönös helyzetének megfelelően);
- a háromszög súlyvonalaira vonatkozó tétel;
- a háromszög Euler-egyenese;
- a háromszög Feuerbach-köre (kilenc pont köre);
- derékszögű háromszögben a magasság- és befogótétel.

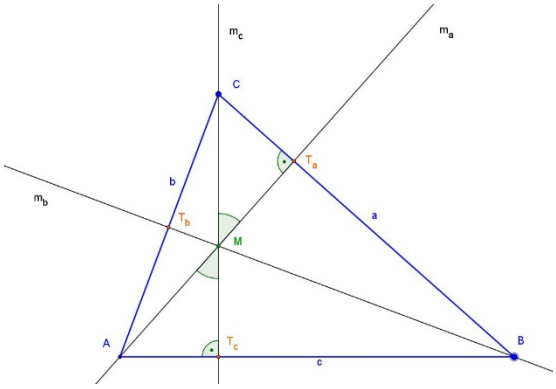
A következőkben egy általam nagyon kedvelt tételt fogok bizonyítani (1976-ban, végzésemkor ez volt közös érettségi-felvételi írásbeli vizsga 8., utolsó feladata).

Tétel: Bármely háromszögben a magasságpont a magasságokat két olyan szakaszra bontja, amelyek szorzata független a választott magasságtól.

Bizonyítás: A tétel állítása $MA \cdot MT_a = MB \cdot MT_b = MC \cdot MT_c$.

Három esetet vizsgálunk, derékszögű, hegyesszögű és tompaszögű háromszögeket.

(1) Derékszögű háromszög esetén a magasságpont és a derékszögű csúcs egybeesik, ezért a tételben szereplő szorzatok minden magasságra nézve 0-t adnak eredményül.
(2) Hegyesszögű háromszög esetén használjuk az ábra jelöléseit!



Az $MAT_c \Delta \sim CMT_a \Delta$, mert két-két szögük páronként egyenlő:

- mindkettőnek van derékszöge;
- az egyíves szögek csúcsszögek.

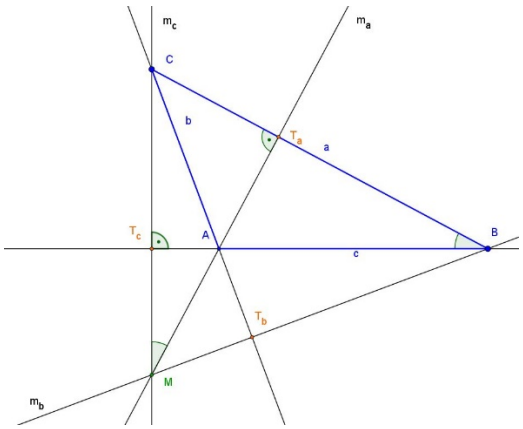
A hasonlóság aránya

$\lambda = \frac{MA}{MC} = \frac{MT_c}{MT_a}$, amelyből rendezés után $MA \cdot MT_a = MC \cdot MT_c$.

Másik két magasságra nézve hasonló módon kapjuk, hogy $MA \cdot MT_a = MB \cdot MT_b$, azaz

$MA \cdot MT_a = MB \cdot MT_b = MC \cdot MT_c$.

(3) Tompaszögű háromszög esetén ugyanígy bizonyítunk:



Ebben az esetben az egyíves szögek azért egyenlők, mert mindketten pótszögei a $BCM\sphericalangle$-nek a $BCT_c \Delta$-ben, illetve a $CMT_a \Delta$-ben. **//**

(*Megjegyzés*: A tételben levő szorzatok értékét, a pont körre vonatkozó hatványához hasonlóan, szokás előjellel ellátni: hegyesszögű háromszögben negatív, tompaszögűben pozitív, annak megfelelően, amilyen a szakaszokból képzett vektorok skaláris szorzata lenne.)

Alkalmazások:

Az egybevágóságot és a hasonlóságot a geometriai tételek bizonyításán túl elsősorban a szerkesztéseknél használjuk. Rendkívül szépek a hasonlósági szerkesztést igénylő feladatok, például: *szerkesszünk háromszöget, ha adott a három magassága*.

A hasonlóságot gyakran használjuk a terület-, felszín- és térfogatszámításnál is, rendkívül leegyszerűsítheti a feladatok megoldását.

A hétköznapi gyakorlatban hasonlóságot alkalmazunk magas tárgyak (épületek, fák stb.) magasságának meghatározásához. További fontos felhasználási területe a térképészet, illetve a különböző dolgokról készült tervrajzok készítése (épületek terv- és alaprajza, kiürítési tervek, különböző gépek, gépelemek műszaki rajza stb.)

A csillagászati távolságok meghatározásában is fontos szerepe van-volt, hasonlóság segítségével határozta meg i. e. 275-ben Eratoszthenész a Föld kerületét.

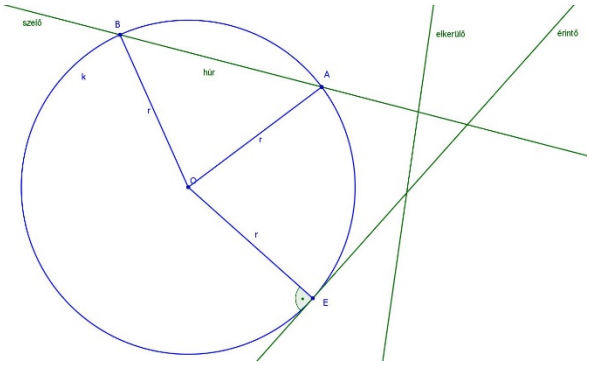
16. tétel: A kör és részei. Kerületi szög, középponti szög, látószög. Húrnégyszögek, érintőnégyszögek.

D: A kör azon pontok halmaza a síkban, amelyek egy adott ponttól (*középpont*) adott távolságra (*sugár*) vannak.

A definícióból kitűnik, hogy

(1) a *kör* megnevezés a *körvonal*at jelenti. Gyakran a sík körvonal határolta részét is körnek nevezzük (például, amikor a *kör terület*éről beszélünk), azonban ennek pontos megnevezése *körlemez* vagy *körlap*, amely lehet *zárt* vagy *nyitott*, attól függően, hogy a körvonal hozzátartozik vagy sem;
(2) a kör középpontja nem tartozik a körhöz;
(3) a sík azon pontjai, amelyek távolsága a középponttól a sugárnál kisebb, a körvonal belsejében vannak, azok pedig, melyek távolsága a középponttól a sugárnál nagyobb, a körvonalon kívül.

A síkban egy körnek és egy egyenesnek 0, 1 vagy 2 közös pontja lehet.



D: Azt egyenest, amelynek nincs közös pontja a körrel, *elkerülő* egyenesnek nevezzük.

D: Azt az egyenest, amelynek egy közös pontja van a körrel, *érintő*nek nevezzük, a közös pontot pedig *érintési pont*nak.

D: Azt az egyenest, amelynek két közös pontja van a körrel, a kör *szelő*jének nevezzük.

D: A körvonalat a közös pontok két *körív*re bontják, jelölésük $\overset{\frown}{AB}$ és $\overset{\frown}{BA}$, a pozitív forgásiránynak megfelelően.

D: A körív végpontjaiba húzott sugarak szögét a körívhez tartozó *középponti szög*nek nevezzük.

D: A kör szelőjének a közös pontok közti szakaszát a kör *húr*jának nevezzük.

D: A kör középpontját tartalmazó húrokat a kör *átmérő*jének nevezzük (az átmérő hossza a sugár kétszerese).

D: A körlapot a szelő két *körszelet*re bontja.

D: A körív és az ív végpontjaiba húzott sugarak meghatározta síkidomot *körcikk*nek nevezzük.

D: Az azonos középpontú köröket *koncentrikus* (vagy *egyközepű*) köröknek nevezzük.

D: A két koncentrikus kör (körcikk) közrefogta síkidomot *körgyűrű*nek (*körgyűrűcikk*nek) nevezzük.

T: A kör bármely pontjában pontosan egy érintő húzható a körhöz, az érintő és az érintési pontba húzott sugár merőleges egymásra.

T: Bármely körben a körvonal hosszának (a kör *kerülete*) és a kör átmérőjének hányadosa állandó. Az állandót π-vel jelöljük, értéke négy jegy pontossággal 3,142. $k = 2\pi r$.

T: Bármely körben a kör *terület*ének és a kör átmérője négyzetének hányadosa $\frac{\pi}{4}$. $t = \frac{\pi d^2}{4} = r^2\pi$.

T: Egy körben a középponti szögek aránya megegyezik a hozzájuk tartozó ívek hosszával és a hozzájuk tartozó körcikkek területével.

E három tétel felhasználásával a kör adott ívének hossza $i = r\widehat{\alpha} = \frac{r\pi\alpha^\circ}{180^\circ}$, adott körcikkének területe $t_{kc} = \frac{ri}{2} = \frac{r^2\widehat{\alpha}}{2} = \frac{r^2\pi\alpha^\circ}{360^\circ}$, ahol *r* a kör sugara, $\widehat{\alpha}$, illetve α° az ívhez (körcikkhez) tartozó középponti szög nagysága radiánban, illetve fokban mérve.

Körszeletek kerületét a körív és a húr hosszának összegeként kapjuk, területüket pedig a körcikk és az *OAB*, ún. középponti háromszög területére vezetjük vissza.

Kerületi és középponti szögek

D: Ha egy konvex szög csúcsa illeszkedik egy körre, szárai pedig a kör egy-egy húrjára, akkor a szöget *kerületi szög*nek nevezzük.

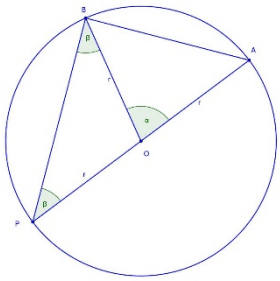
A körvonalnak a kerületi szög szárai közé eső részét a kerületi szöghöz tartozó ívnek nevezzük, ilyen értelemben beszélünk *adott ívhez tartozó* vagy *adott íven nyugvó* kerületi szögről, amelyet általában β-val jelölünk.

D: A kör egy húrjának és a húrvégpontban a körhöz húzott érintőnek a szögét *érintő szárú kerületi szög*nek nevezzük.

Tétel: Adott körben adott ívhez tartozó középponti szög mindig kétszerese az ívhez tartozó kerületi szögnek.

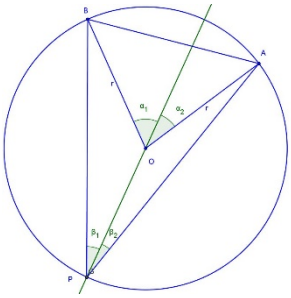
Bizonyítás: A bizonyításban négy esetet vizsgálunk. Használjuk az ábrák jelöléseit!

(1) *A kör középpontja illeszkedik a kerületi szög egyik szárára*:



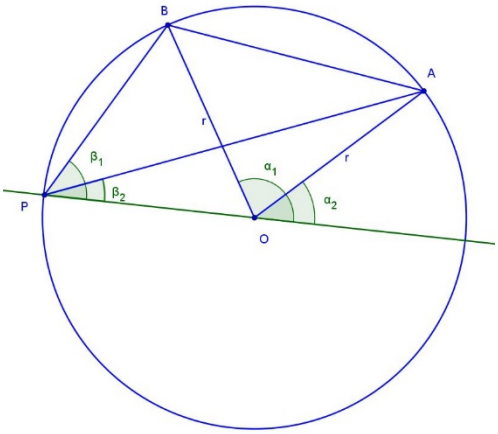
Ebben az esetben a *POB* háromszög egyenlő szárú, mert két oldala a kör sugara. Ezért alapon fekvő, β-val jelölt szögei egyenlő nagyok. Az ívhez tartozó *α* középponti szög ennek a háromszögnek külső szöge, amely a nem mellette fekvő két belső szög összegével egyenlő, tehát *α* = 2 β**.**

(2) *A kör középpontja a kerületi szög belsejében van*:



Ebben az esetben húzzuk be a *PO* egyenest! Ez az egyenes a kerületi és a középponti szöget is két-két olyan részre vágja, amelyeknek összege, továbbá ezek az (1)-nek megfelelő szögek. Emiatt $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta_1 + 2\beta_2 = 2(\beta_1 + \beta_2) = 2\beta$.

(3) *A kör középpontja a kerületi szögön kívül van*:



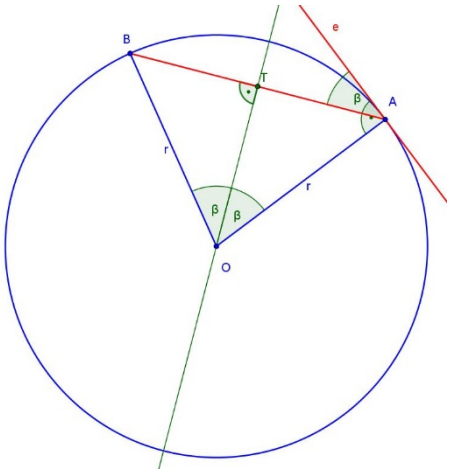
Ebben az esetben is húzzuk be a *PO* egyenest!

Ekkor két olyan új kerületi és középponti szög jön létre, amelyeknek a tételben szereplő szögek a különbségei, továbbá ezek az (1)-nek megfelelő szögek.

Emiatt

$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = 2\beta_1 - 2\beta_2 = 2(\beta_1 - \beta_2) = 2\beta$.

(4) *Érintő szárú kerületi szög esetén* három esetet különböztetünk meg: $\beta < 90^\circ$; $\beta = 90^\circ$ és $\beta > 90^\circ$.

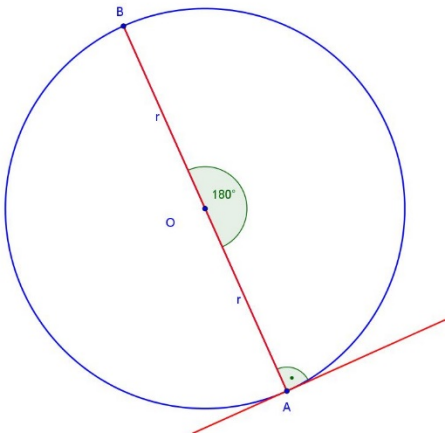


Legyen először $\beta < 90^\circ$!

Húzzuk be az *ABO* egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magasságát, amely felezi az ívhez tartozó *α* középponti szöget!

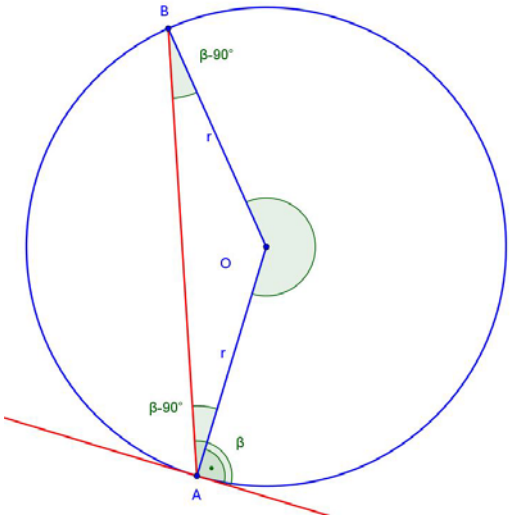
Mivel az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, ezért az érintő szárú kerületi szög és az $AOT\sphericalangle$ merőleges szárú szögek, így egyenlők.

Tehát $\alpha = 2\beta$.



$\beta = 90^\circ$ esetén az *AB* húr egyben átmérő is, így teljesül a tétel állítása.

$\beta > 90^\circ$ esetén az *AOB* egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei $\beta - 90^\circ$ nagyságúak, így az $AOB\sphericalangle = 180^\circ - 2(\beta - 90^\circ) = 360^\circ - 2\beta$. Ebből már következik, hogy az $\overset{\frown}{AB}$-hez tartozó középponti szög nagysága 2β (*ábra a következő oldalon*).



Tehát a tétel állítását az összes lehetséges esetre beláttuk. ***//***

E tétel közvetlen következményei:

T: Adott körben az azonos íven nyugvó kerületi szögek egyenlők.

T: Azonos sugarú körökben az ugyanolyan hosszú íveken nyugvó kerületi szögek egyenlők.

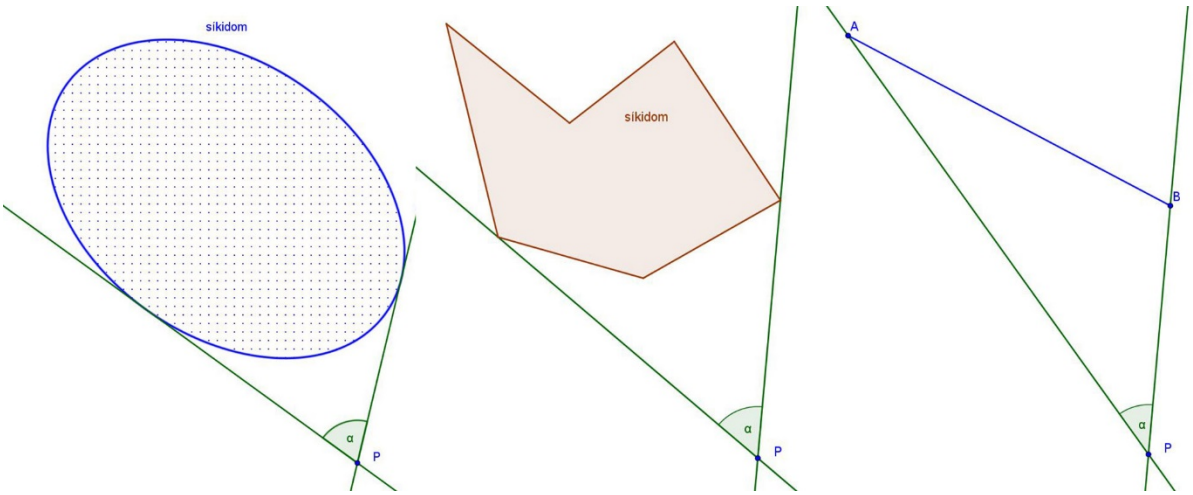
Látószög, látókörív

A látószög *hétköznapi* értelmezése: a legkisebb olyan szög, amekkorára szemünket ki kell nyitnunk ahhoz, hogy a nézett tárgyat éppen lássuk, hogy beleférjen látómezőnkbe.

D: Egy *síkidom* látószögén az adott pontból a síkidomhoz húzható *érintők* (*egy közös pontú vagy szakaszú egyenesek*) szögét értjük.

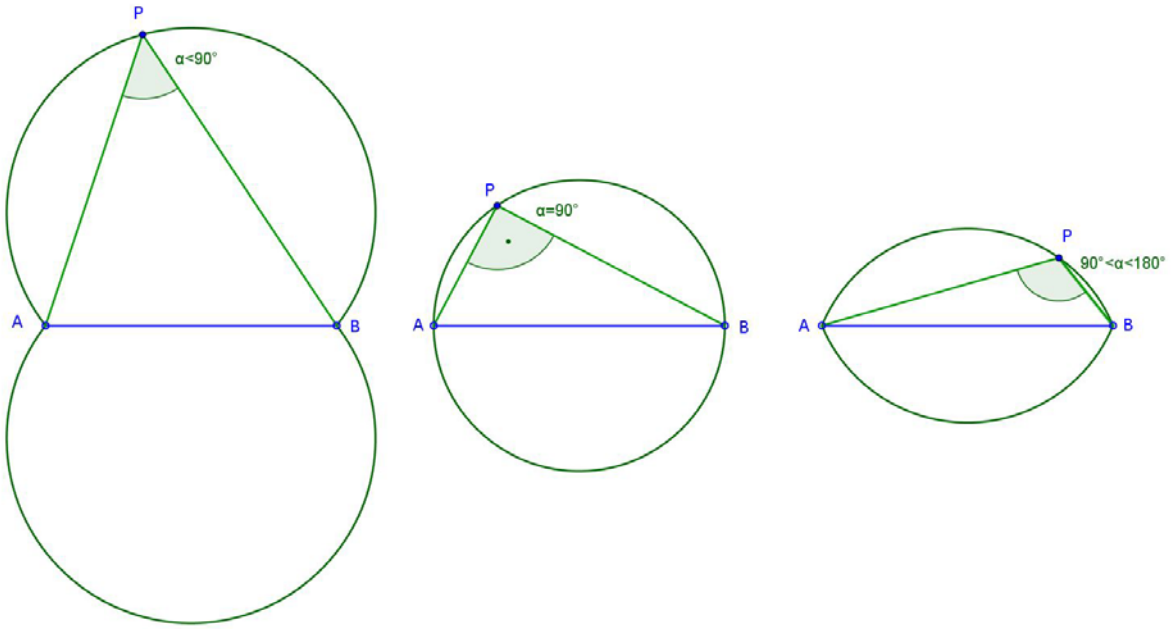
D: Adott a síkban egy *AB* szakasz és egy *P* pont. Ha $APB\sphericalangle = \alpha$, akkor azt mondjuk, hogy a P pontból az AB szakasz α szögben látszik.

Szemléletesen:



T: Azon pontok halmaza a síkban, amelyekből a sík egy adott *AB* szakasza adott α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) szögben látszik, *két*, az *AB* egyenesére szimmetrikusan elhelyezkedő *nyílt körív*.

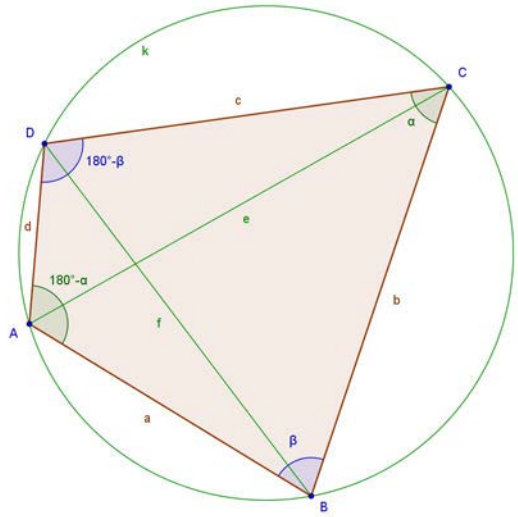
A látószögkörívek alakja a szög nagyságától függ:



Derékszög esetén Thalész tételét és megfordítását kapjuk.

Látókörívet az érintő szárú kerületi szög segítségével szerkesztünk.

Húrnégyszögek



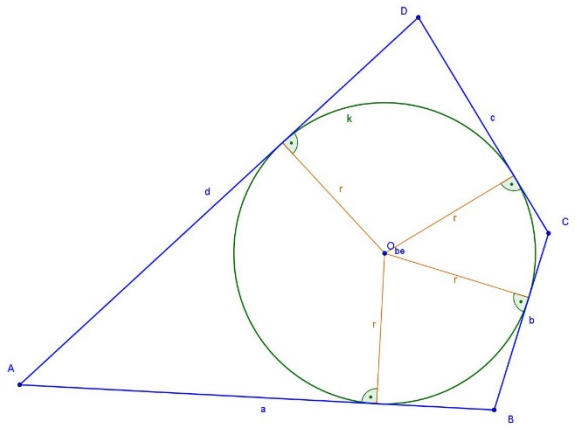
D: Az *ABCD* négyszög húrnégyszög, ha csúcsai egy körre illeszkednek.
T: Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeinek összege 180°.
Három húrnégyszögekre vonatkozó nevezetes tétel:
T: Bármely húrnégyszögben a szemközti oldalak szorzatának összege az átlók szorzatával egyenlő (*Ptolemaiosz tétele*): $ef = ac + bd$.
T: A húrnégyszög területe $t = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, ahol *a*; *b*; *c*; *d* a húrnégyszög oldalai és $s = \frac{a+b+c+d}{2}$, a húrnégyszög félkerülete (*Brahmagupta tétele*).

T: Egy trapéz akkor és csak akkor *szimmetrikus trapéz*, ha húrnégyszög (*húrtrapéz*).

D: Egy sokszöget húrsokszögnek nevezünk, ha csúcsai egy körre illeszkednek.

T: A szabályos sokszögek húrsokszögek.

Érintőnégyszögek



D: Azokat a négyszögeket, amelyeknek van beírható körük, érintőnégyszögnek nevezzük.

T: Egy konvex négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha szemközti oldalainak összege egyenlő, $a + c = b + d$.

D: Egy sokszöget érintősokszögnek nevezünk, ha van beírható köre.

T: A szabályos sokszögek érintősokszögek.

Alkalmazások

A matematikán belüli alkalmazások közé vehetjük a kúpok, csonka kúpok palástjának kiszámítását stb.

A kör és részei kiszámításának számtalan felhasználási területe van a mechanikai eszközök és gépek tervezése során: láncos és kúpos fogaskerékáttétek, szíjhajtások, dugattyúk holtpontjának kiegyensúlyozása (gőzgépek hajtott kerekeinek alakja). Idesorolhatjuk még az alsó- és felsőpályás hidak tartóelemei hosszának meghatározását, különböző építészeti megoldások (boltívek, kupolák stb.) tervezését is.

Színházak, mozik, különböző rendezvénytermek tervezésénél tekintettel kell lennünk a megfelelő, minél nagyobb látószög elérésére, a jegyárak meghatározásakor célszerű ezt is figyelembe venni.

17. tétel: Vektorok, vektorműveletek. Vektorfelbontási tétel. Vektorok koordinátái. Skaláris szorzat.

A vektorok bevezetésére elsősorban fizikai problémák megoldása sarkallta a matematikusokat és a fizikusokat. Idetartozik a mozgások kinematikai (elmozdulás, sebesség, gyorsulás) és dinamikai (erő, lendület, forgatónyomaték, perdület) leírása. A mező fogalmának kialakulása is szorosan összefügg az elektromos, mágneses és gravitációs térerősség jellemzésével.

A vektorok matematikai eszköztárunk egyik nagyon fontos eszközét jelentik, fogalmukat azonban csak komoly elvonatkoztatás után tudjuk megadni (*bővebben a 2. számú kiegészítésben*).

Középiskolában még a szemléletes meghatározásnál maradunk:

D: Az irányított szakaszokat vektoroknak nevezzük.

A szakasz attól irányított, hogy van kezdő- és végpontja.

Jelölésük: **a**; $\underline{a}$; $\vec{a}$; $\overrightarrow{PQ}$.

D: Azokat a vektorokat, amelyek kezdőpontja a sík (a tér) egy rögzített *O* pontja, *helyvektor*nak nevezzük. A nem helyvektorokat *szabad vektor*nak nevezzük.

A vektorokat két mennyiséggel tudjuk, kell jellemeznünk: a hosszukkal és az irányukkal. A vektorok hosszát abszolútérték-jellel jelöljük: $|\mathbf{a}|$ $|\underline{a}|$; $|\vec{a}|$; $|\overrightarrow{PQ}|$. Ezért a *vektor hossza*, *nagysága* és *abszolút értéke ugyanazt a fogalmat jelenti*. A vektorok irányát egy *rögzített félegyenes*hez (irányvektorhoz) viszonyítva határozzuk meg.

D: A nulla hosszúságú vektort *nullvektor*nak nevezzük, jele **0**; $\underline{0}$ vagy $\vec{0}$, iránya tetszőleges.

A nullvektor mint irányított szakasz kezdő- és végpontja megegyezik. A *tetszőleges irány* annyit tesz, hogy mindig *annyi, amennyi szükséges*: a **0** lehet párhuzamos és merőleges is egy másik vektorhoz viszonyítva.

D: Két vektort *egyenlő*nek mondunk, ha hosszuk és irányuk megegyezik.

D: Két vektor egymás *ellentett*je, ha hosszuk megegyezik, irányuk pedig ellentétes. Az **a** ellentettje **-a**.

D: Két (nem nulla) vektor *szög*én a következőt értjük:

- ha irányuk megegyezik, akkor szögük 0°;
- ha irányuk ellentétes, akkor szögük 180°;
- minden más esetben a két vektor iránya által meghatározott két szög közül a kisebb.

Műveletek vektorokkal

A vektorok között műveleteket értelmezünk.

D: Az **a** és a **b** összegén azt a vektort értjük, amelyet úgy kapunk meg, hogy az **a** végpontjába önmagával párhuzamosan eltoljuk a **b** kezdőpontját, majd vesszük az **a** kezdőpontjából az eltolt **b** végpontjába mutató irányított szakaszt.

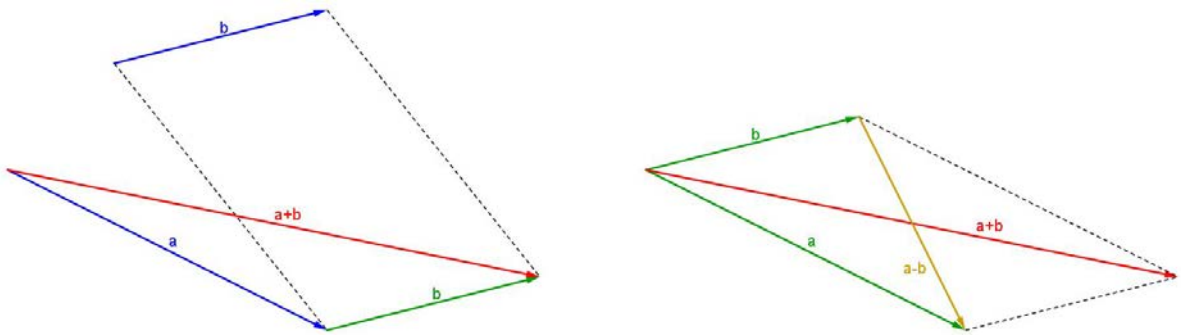
Ezzel a módszerrel egyszerre több vektort is össze tudunk adni, láncba fűzve azokat.

D: Az **a** és a **b** különbségén azt a **c** vektort értjük, amelyre **a** = **b** + **c**.

Ezzel ekvivalens az a definíció, hogy az **a**-hoz hozzáadjuk a **b** ellentettjét.

Nyilván **a** – **b** és **b** – **a** egymás ellentettjei, továbbá ha az *A* és a *B* pontba mutató helyvektorok **a** és **b**, akkor $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$.

Két (nem párhuzamos és nem nulla) vektor összegét és különbségét megkaphatjuk a paralelogramma-módszerrel is: *Két vektor – közös kezdőpontból felmérve – kifeszít egy paralelogrammát. A paralelogramma közös kezdőpontból induló átlója a két vektor összege, másik átlója a két vektor különbsége, amely a kisebbítendőbe mutat.*



A vektorösszeadás műveleti tulajdonságai:

T: Bármely **a**; **b** és **c** vektorra

(1) kommutatív: **a** + **b** = **b** + **a**;
(2) asszociatív: (**a** + **b**) + **c** = **a** + (**b** + **c**).

Definiáljuk vektor szorzását valós számmal:

D: Tetszőleges **a** vektor és $k \in \mathbb{R}$ szám esetén

$$k \cdot \mathbf{a} := \begin{cases} k > 0 \text{ esetén az a vektor, amelynek hossza } \mathrm{k} \cdot |\mathbf{a}| \text{ és iránya } \mathbf{a}\text{-val megegyező;} \\ k = 0 \text{ esetén } \mathbf{0}; \\ k < 0 \text{ esetén az a vektor, amelynek hossza } |\mathrm{k}| \cdot |\mathbf{a}| \text{ és iránya } \mathbf{a}\text{-val ellentétes.} \end{cases}$$

A vektorok számmal szorzásának tulajdonságai:

T: Bármely **a**; **b** vektor és $k; l \in \mathbb{R}$ szám esetén:

(1) $(kl)\mathbf{a} = k(l\mathbf{a})$;
(2) $k\mathbf{a} + l\mathbf{a} = (k + l)\mathbf{a}$ és
(3) $k\mathbf{a} + k\mathbf{b} = k(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

Vektor felbontása összetevőkre, vektor koordinátái

Legyenek az *S* síkban **a** és **b** nem egyirányú (és nem nulla) vektorok.

T: Az *S* sík bármely **c** vektorához létezik olyan egyértelműen meghatározott c_1 és c_2 valós szám, hogy

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b}.$$

D: A $c_1\mathbf{a}$ és $c_2\mathbf{b}$ vektorokat a **c** vektor **a**, illetve **b** irányú összetevőinek nevezzük.

Ha a tételben szereplő **a** és **b** vektorok az *S* sík helyvektorai, akkor ezek *bázisrendszer* alkotnak, amelyre egy *koordináta-rendszer* építhető. Ha $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1$ és $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, akkor ezek *ortonormált bázisrendszer*t (orto=merőleges, normált=egységnyi hosszú) alkotnak – ilyen az általunk használt Descartes-féle koordináta-rendszer.

A Descartes-féle koordináta-rendszer bázisvektorait **i**-vel (*x* irányú) és **j**-vel (*y* irányú) jelöljük.

A vektorfelbontási tétel miatt bármely **a** vektor esetén $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}$, ahol a_1 és a_2 egyértelműen meghatározott valós számok.

D: Az a_1 és a_2 számokat az **a** vektor koordinátáinak nevezzük, jelben **a**(a_1; a_2); a_1-et abszcisszának, a_2-t ordinátának nevezzük.

Térben vizsgálva a vektorokat, a *z* tengely irányú egységvektort **k**-val jelöljük, a koordináta neve *applikáta*.

A vektor hosszára nézve pedig:

T: Bármely **a**(a_1; a_2) vektor esetén $|\mathbf{a}(a_1;a_2)|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$.

A vektorkoordináták segítségével könnyen elvégezhetők a műveletek is:

T: Bármely **a**(a_1; a_2); **b**(b_1; b_2) vektor és $k\in\mathbb{R}$ szám esetén:

(1) $\mathbf{a}(a_1;a_2)\pm\mathbf{b}(b_1;b_2)=(\mathbf{a}\pm\mathbf{b})(a_1\pm b_1;a_2\pm b_2)$;

(2) $k\mathbf{a}(a_1;a_2)=(k\mathbf{a})(ka_1;ka_2)$.

A koordinátageometriában gyakran van szükségünk arra, hogy egy vektort 90°-kal elforgassunk (felírjunk egy rá merőleges vektort), ez könnyen megtehető a koordináták segítségével:

T: Bármely **a**(a_1; a_2) vektor esetén

(1) **a**(a_1; a_2) vektor +90°-os elforgatottja $\mathbf{a}'(-a_2;a_1)$;

(2) **a**(a_1; a_2) vektor -90°-os elforgatottja $\mathbf{a}''(a_2;-a_1)$.

Vektorok skaláris szorzata

Szintén fizikai problémák – például a munka (erő x elmozdulás) kiszámítása – tette szükségessé, hogy két vektor szorzatát is értelmezzük.

D: Az **a** és **b** vektorok skaláris szorzatán az $|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\sphericalangle(\mathbf{a};\mathbf{b})$ valós számot értjük.

(A skaláris szorzat valójában *nem tekinthető* – hagyományos értelemben vett – *műveletnek*, mert eredménye *kivezet* abból a halmazból, amelyen értelmezzük: két szám összege, különbsége, szorzata is szám, ahogy két vektor összege és különbsége is vektor – ezzel ellentétben két vektor skaláris szorzata számot ad eredményül.)

A skaláris szorzat tulajdonságai:

T: Bármely **a**; **b** és **c** vektor és $k\in\mathbb{R}$ szám esetén:

(1) **ab** = **ba** (*kommutatív*);

(2) $k(\mathbf{ab}) = (k\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(k\mathbf{b})$;

(3) $(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} \pm \mathbf{bc}$ (*disztributív* az összeadásra és kivonásra nézve).

Skaláris szorzat esetén az *asszociatív tulajdonság* ($(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$) *nem értelmezhető*, mert a benne szereplő két szorzás *nem ugyanazt a műveletet* jelenti: a bal oldalon a zárójelben *skaláris szorzat*, a zárójel után pedig *vektor szorzása számmal* szerepel. Az egyenlőség egyébként általában nem is áll fenn, mert a bal oldal egy **c**-vel párhuzamos vektort, a jobb pedig egy **a**-val párhuzamos vektort eredményez.

Az egyik leggyakrabban használt, skaláris szorzatra vonatkozó tétel:

T: Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0.

A skaláris szorzatot könnyű kiszámítani a vektorok koordinátáiból:

Tétel: Bármely **a**(a_1; a_2); **b**(b_1; b_2) vektor esetén $\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Bizonyítás: Felhasználva, hogy a skaláris szorzat disztributív az összeadásra nézve, továbbá a vektorműveletekre érvényes tételeket:

$$\mathbf{a}(a_1;a_2)\mathbf{b}(b_1;b_2) = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = (a_1\mathbf{i})(b_1\mathbf{i}) + (a_1\mathbf{i})(b_2\mathbf{j}) + (a_2\mathbf{j})(b_1\mathbf{i}) + (a_2\mathbf{j})(b_2\mathbf{j}) =$$
$$= a_1b_1\mathbf{ii} + a_1b_2\mathbf{ij} + a_2b_1\mathbf{ji} + a_2b_2\mathbf{jj}.$$

Mivel $\mathbf{i} \perp \mathbf{j}$ ezért $\mathbf{ij} = \mathbf{ji} = 0$, továbbá $\mathbf{ii} = |\mathbf{i}||\mathbf{i}|\cos 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ és $\mathbf{jj} = 1$ hasonlóan. Ezért

$$\mathbf{a}(a_1;a_2)\mathbf{b}(b_1;b_2) = a_1b_1 + a_2b_2. \quad //$$

Térbeli vektorok esetén hasonlóan kapjuk, hogy $\mathbf{a}(a_1;a_2;a_3)\mathbf{b}(b_1;b_2;b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Ez a tétel lehetővé teszi, hogy egyszerűen és gyorsan meghatározzuk *két vektor* vagy (normálvektoraik felhasználásával) *két egyenes hajlásszögét*:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a}(a_1;a_2)\mathbf{b}(b_1;b_2) = |\mathbf{a}(a_1;a_2)||\mathbf{b}(b_1;b_2)|\cos\sphericalangle(\mathbf{a};\mathbf{b}) \\ \mathbf{a}(a_1;a_2)\mathbf{b}(b_1;b_2) = a_1b_1 + a_2b_2 \end{array}\right\} \Rightarrow |\mathbf{a}(a_1;a_2)||\mathbf{b}(b_1;b_2)|\cos\sphericalangle(\mathbf{a};\mathbf{b}) = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Amelyből

$$\cos\sphericalangle(\mathbf{a};\mathbf{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\mathbf{a}(a_1;a_2)||\mathbf{b}(b_1;b_2)|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Alkalmazások

Vektorok segítségével könnyen bizonyíthatók elemi geometriai tételek (súlypont, a magasságponttal kapcsolatos tételek, szögfelezőtétel stb.), de legfontosabb felhasználási területük a középiskolában a koordináta-geometria (egyenesek egyenletének felírása, érintő meghatározása stb.).

A legfontosabb fizikai alkalmazásokat már említettem, az informatikában pedig leggyakrabban képábrázolási és -szerkesztési eljárásokban használjuk (vektorgrafika).

18. tétel: Szakaszok és egyenesek a koordinátasíkon. Párhuzamos és merőleges egyenesek. Elsőfokú egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek grafikus megoldása.

Szakaszt a koordinátasíkon (*-térben, és általában is*) a két végpontjának megadásával adunk meg.

D: A koordinátasíkon (-térben) az origóból egy adott pontba mutató vektort az adott pont helyvektorának nevezzük, és koordinátáin a végpont koordinátáit értjük. $A(a_1;a_2) \leftrightarrow \underline{a}(a_1;a_2)$

T: Az $A(a_1;a_2)$ és $B(b_1;b_2)$ pontok meghatározta szakasz hossza

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}(b_1-a_1;b_2-a_2)\right| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}\ .$$

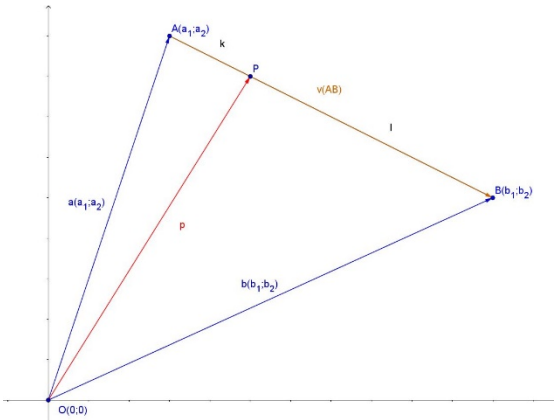
T: Az $A(a_1;a_2)$ és $B(b_1;b_2)$ pontok meghatározta szakasz felezőpontjának koordinátái

$$F_{AB}\left(\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2}\right)$$

Tétel: Az $A(a_1;a_2)$ és $B(b_1;b_2)$ pontok meghatározta szakaszt $k:l$ arányban osztó P pont koordinátái:

$$P\left(\frac{la_1+kb_1}{k+l};\frac{la_2+kb_2}{k+l}\right).$$

Bizonyítás: HÁJ!



Ekkor

$$\left.\begin{array}{l} \underline{p}=\underline{a}+\overrightarrow{AP} \\ \overrightarrow{AP}=\dfrac{k}{k+l}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AB}=\underline{b}-\underline{a}=\overrightarrow{AB}(b_1-a_1;b_2-a_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AP}\left(\frac{k(b_1-a_1)}{k+l};\frac{k(b_2-a_2)}{k+l}\right) \Rightarrow \underline{p}=\underline{a(a_1;a_2)}+\overrightarrow{AP}\left(\frac{k(b_1-a_1)}{k+l};\frac{k(b_2-a_2)}{k+l}\right),$$

ahonnan

$$\underline{p}=\underline{p}\left(a_1+\frac{k(b_1-a_1)}{k+l};a_2+\frac{k(b_2-a_2)}{k+l}\right)=\underline{p}\left(\frac{(k+l)a_1}{k+l}+\frac{k(b_1-a_1)}{k+l};\frac{(k+l)a_2}{k+l}+\frac{k(b_2-a_2)}{k+l}\right)=\underline{p}\left(\frac{la_1+kb_1}{k+l};\frac{la_2+kb_2}{k+l}\right),$$

amelyből $P\left(\dfrac{la_1+kb_1}{k+l};\dfrac{la_2+kb_2}{k+l}\right)$. ***//***

Az egyenes és egyenletei

A koordinátasíkon egy egyenest a következő adatokkal szoktunk megadni:

- két pontjával;
- egy pontjával és egy, az egyenesre merőleges vektorral (*normálvektor*);
- egy pontjával és egy, az egyenessel párhuzamos vektorral (*irányvektor*);
- egy pontjával és az egyenes *x* tengellyel bezárt *irányszög*ével vagy *meredekség*ével.

D: Az irányszög tangensét – ha létezik – az egyenes *iránytangens*ének vagy *meredekség*ének nevezzük.

D: Görbe egyenletének azt az egyenletet nevezzük, amelynek gyökei és a görbe pontjainak koordinátái között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van.

Tétel: A $P_0(x_0;y_0)$ ponton átmenő, $\underline{n}(A;B)$ normálvektorú egyenes egyenlete $Ax+By=Ax_0+By_0$.

Bizonyítás: *P* legyen az *e* egyenes egy tetszőleges pontja! $P\in e \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P}\perp \underline{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P}\cdot\underline{n}=0$. Felírva a vektorok koordinátáit, alkalmazva a koordinátáival adott vektorok skaláris szorzatának kiszámítására vonatkozó összefüggést, és rendezve a kapott egyenletet, a tétel állítását kapjuk. **//**

Tétel: A $P_0(x_0;y_0)$ ponton átmenő, $\underline{v}(v_1;v_2)$ irányvektorú egyenes egyenlete $v_2x-v_1y=v_2x_0-v_1y_0$.

Bizonyítás: A $\underline{v}(v_1;v_2)$ irányvektort 90^0-kal elforgatva az egyenes egy normálvektorát kapjuk, ennek koordinátái $\underline{n}(v_2;-v_1)$. Ezt beírva az egyenes normálvektoros egyenletébe a tétel állítását kapjuk. **//**

Két ponton átmenő egyenes egyenletét úgy írjuk föl, hogy először a két pontot összekötő vektort határozzuk meg (*ez irányvektor lesz*), majd ennek segítségével felírjuk az egyenes irányvektoros egyenletét.

T: A $\underline{v}(v_1;v_2), v_1\neq 0$ irányvektorú egyenes meredeksége $m=\frac{v_2}{v_1}$.

Így az egyenes irányvektoros egyenletéből kapjuk, hogy

T: A $P_0(x_0;y_0)$ ponton átmenő, *m* meredekségű egyenes egyenlete $y-y_0=m(x-x_0)$.

Párhuzamos és merőleges egyenesek a koordinátasíkban

Legyen *e* és *f* két egyenes az *xy* koordinátasíkban. Ekkor a szokásos jelölésekkel:

T: $e\parallel f \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{n_e}=k\cdot\underline{n_f}, & k\in\mathbb{R}\setminus(0) \\ \underline{v_e}=k\cdot\underline{v_f}, & k\in\mathbb{R}\setminus(0) \\ m_e=m_f \end{cases}$ $\qquad e\perp f \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{n_e}\cdot\underline{n_f}=0 \\ \underline{v_e}\cdot\underline{v_f}=0 \\ m_e\cdot m_f=-1 \end{cases}$

E tételek állításai nyilvánvalóan következnek a korábban megadott definíciókból és tételekből.

Elsőfokú egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek grafikus megoldása

A *kétismeretlenes elsőfokú egyenlőtlenségek* általános alakja $ax+by+c</\leq/\geq/>0,\ a;b;c\in\mathbb{R}$.

Ezek megoldáshalmazát a koordinátasíkon könnyen tudjuk ábrázolni.

- Ábrázoljuk az $ax+by+c=0$ egyenletű egyenest.
- A $b\neq 0$ esetben a megoldáshalmazt a koordinátasíknak az egyenes alatti vagy feletti nyitott vagy zárt félsíkja pontjai alkotják;
- A $b=0$ esetben a megoldáshalmazt a koordinátasíknak az egyenes bal vagy jobb oldalán lévő nyitott vagy zárt félsíkja pontjai alkotják.

A *kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszerek* általános alakja

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ dx+ey+f=0 \end{cases}, \text{ ahol } a;b;c;d;e;f\in\mathbb{R}.$$

Az egyenletrendszer grafikus megoldása során ábrázoljuk a két egyenlethez tartozó egyeneseket, és a két egyenes grafikonja metszéspontjának koordinátái adják az egyenletrendszer gyökét. Optimális esetben a metszéspont koordinátái leolvashatók az ábráról, különben kénytelenek vagyunk az egyenletrendszert algebrai úton megoldani.

Ha a két egyenesnek nincs metszéspontja (*párhuzamosak*), akkor az egyenletrendszernek *nincs gyöke*.

Ha a két egyenes *egybeesik*, akkor az egyenletrendszernek *végtelen sok gyöke van*.

Alkalmazások

Legtöbbször elemi geometriai feladatok, tételek koordinátageometriai megoldása, bizonyítása során használjuk a fentieket. A gyakorlati életben elsősorban költség-haszon elemzésekre, lineáris programozási feladatok megoldására használjuk e módszert.

*Normálvektor*a nem csak egyeneseknek van: bármely görbe vagy felület adott pontbeli normálvektorán a pontban a görbe érintőjére, illetve a felület érintősíkjára állított merőleges vektort értjük.

19. tétel: A kör és a parabola a koordinátasíkon. Kör és egyenes, parabola és egyenes kölcsönös helyzete. Másodfokú egyenlőtlenségek grafikus megoldása.

A négy kúpszelet (kör, ellipszis, parabola és hiperbola) közül a kör és parabola vizsgálata – elsősorban sok matematikai, csillagászati és fizikai alkalmazásuk miatt – már a görög matematikában is kiemelt szerepet játszott, ez tette indokolttá koordinátageometriai vizsgálatukat is.

D: Görbe egyenletének azt az egyenletet nevezzük, amelynek gyökei és a görbe pontjainak koordinátái között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van.

T: Az *xy* koordinátasíkban a *C*(*u*; *v*) középpontú, *r* sugarú kör egyenlete: $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$.

A kör definíciójából következően a körvonal határolta síkrész belső pontjainak a koordinátáira $(x-u)^2+(y-v)^2<r^2$, míg a körvonalon kívüli pontok koordinátáira $(x-u)^2+(y-v)^2>r^2$.

A köregyenletben a zárójeleket felbontva és nullára rendezve olyan kétismeretlenes másodfokú egyenletet kapunk, amelyben a négyzetek együtthatója megegyezik, és nincs benne *xy*-os tag.

Fordítva: Az $ax^2+ay^2+bx+cy+d=0 \quad (a;b;c;d\in\mathbb{R},\ a\neq 0)$ alakú kétismeretlenes másodfokú egyenlet *d* (teljes négyzetté alakítással meghatározható) értékétől függően vagy egy köregyenlet, vagy ún. null- vagy képzetes kör egyenlete.

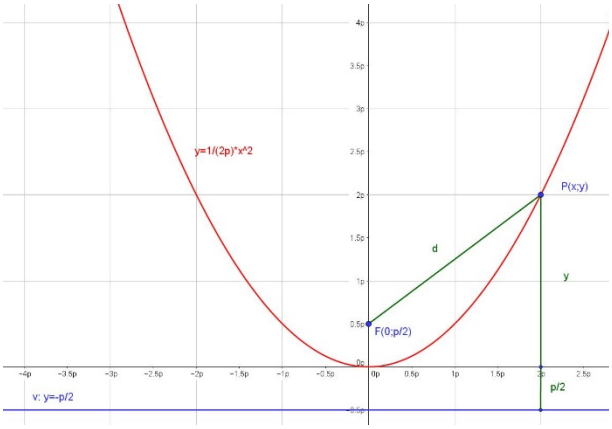
T: Azon pontok halmaza a síkban, amelyek egyenlő távolságra vannak a sík egy egyenesétől és egy arra nem illeszkedő ponttól, a parabola. (Az adott egyenes a parabola vezéregyenese (direktrixe), az adott pont a parabola fókuszpontja, az egyenes és a pont távolsága pedig a parabola paramétere.)

D: A fókuszpont és a vezéregyenes távolságát felező pontot a parabola csúcspontjának nevezzük (a sík adott tulajdonságú pontjai közül ez van legközelebb mindkettőhöz).

Középiskolában csak olyan parabolák egyenletével foglalkozunk, amelyek tengelye (a pontból a vezéregyenesre állított merőleges) valamelyik koordinátatengellyel párhuzamos.

Tétel: Az *xy* koordinátasíkban az origó csúcspontú, az *y* tengellyel párhuzamos tengelyű, *p* paraméterű parabola egyenlete $y=\frac{1}{2p}x^2$.

Bizonyítás: HÁJ!



p – mivel egyenes és arra nem illeszkedő pont távolsága – pozitív valós szám. Ennek következtében fókuszpontja koordinátái

$F(0;\frac{p}{2})$,

vezéregyenesének egyenlete $v:\ y=-\frac{p}{2}$.

A $P(x;\ y)$ koordinátájú pont akkor és csak akkor illeszkedik a parabolára, ha $d(P;F)=d(P;v)$, azaz

$$0\le\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}=y+\frac{p}{2}.$$

Mivel a nemnegatív valós számok halmazán a négyzetre emelés ekvivalens művelet, ezért

$x^2+y^2-py+\frac{p^2}{4}=y^2+py+\frac{p^2}{4}$, amelyet rendezve

$x^2=2py$, amelyből ($p>0$ lévén) $2p$-vel osztva a tétel állítását kapjuk. **//**

A lefelé álló parabolák (ahol a fókuszpont a vezéregyenes alatt található) egyenletét úgy kapjuk meg, ha az egyenletben paraméterül a pont és egyenes távolságának –1-szeresét vesszük.

Ezt szokás a parabola *tengelyponti egyenlet*ének is nevezni.

Hasonló módon (vagy a másodfokú függvény transzformációjának segítségével) kapjuk, hogy:

T: Az xy koordinátasíkban a $C(u;\ v)$ csúcspontú, az y tengellyel párhuzamos tengelyű, p paraméterű parabola egyenlete $y=\frac{1}{2p}(x-u)^2+v$ (*csúcsponti egyenlet*).

Továbbá:

T: Az xy koordinátasíkban a $C(u;\ v)$ csúcspontú, az x tengellyel párhuzamos tengelyű, p paraméterű parabola egyenlete $x=\frac{1}{2p}(y-v)^2+u$.

A fenti parabolák egyenlete tehát vagy $ax^2+bx+cy+d=0\ (a;b;c;d\in\mathbb{R},\ a;c\neq 0)$, vagy $ay^2+by+cx+d=0\ (a;b;c;d\in\mathbb{R},\ a;c\neq 0)$ alakú kétismeretlenes másodfokú egyenlet. Minden ilyen alakú egyenlet egyben egy parabola egyenlete. (*Itt láttuk be azt a korábban, szemléletből elfogadott tételt, hogy a másodfokú függvény képe egy parabola.*)

A kör és az egyenes kölcsönös helyzete

Két görbe *kölcsönös helyzet*ének meghatározása általában a görbék *közös pontjai szám*ának a meghatározását jelenti.

A koordinátageometriában a közös pontok koordinátáit a két görbe egyenletéből álló egyenletrendszer gyökeiként kapjuk.

Ha a kör és az egyenes egyenletéből álló egyenletrendszernek két gyökpárja van, akkor az egyenest a kör *szelő*jének nevezzük, ha egy, akkor *érintő*jének, ha egy sincs, akkor *az egyenes elkerüli a kört* – mindez összhangban van az elemi geometriában megfogalmazottakkal.

A parabola és az egyenes kölcsönös helyzete

Ha a parabola és az egyenes egyenletéből álló egyenletrendszernek két gyökpárja van, akkor az egyenest a parabola *szelő*jének nevezzük, ha egy, akkor ha a parabola tengelye nem párhuzamos az egyenessel, az *érintő*jének, ha párhuzamos, akkor pedig *átmetsző egyenes*ének nevezzük. Ha egy közös

pont sincs, akkor *az egyenes elkerüli a parabolát* – ez is összhangban van az elemi geometriában megfogalmazottakkal.

Másodfokú egyenlőtlenségek grafikus megoldása

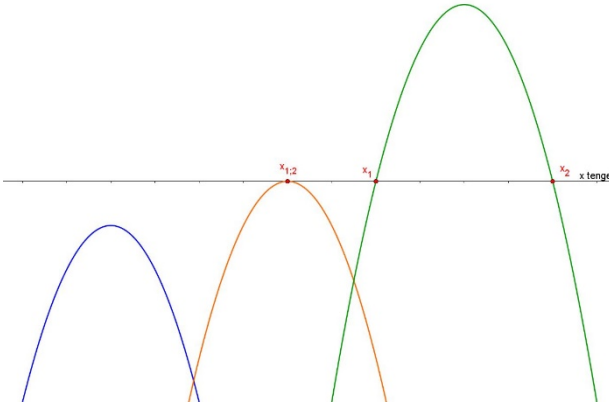
Másodfokú egyenlőtlenségek megoldásának legegyszerűbb (*így legszebb*) megoldási módja a grafikus megoldás.

Az egyismeretlenes másodfokú egyenlőtlenségek általános alakja

$$ax^2 + bx + c < / \leq / \geq / > 0 \ (a;b;c \in \mathbb{R}, a \neq 0) .$$

A bal oldalt függvényként ábrázolva minden esetben egy *y* tengellyel párhuzamos tengelyű parabolát kapunk. Ennek kell megkeresnünk a zérushelyeit, majd ezek ismeretében felírni az egyenlőtlenség megoldáshalmazát (*M*).

Vegyünk egy példát: $ax^2 + bx + c \geq 0 \ (a;b;c \in \mathbb{R}, a < 0)$, $D = \mathbb{R}$. A függvény képe ekkor egy lefelé álló parabola lesz. Azokat az *x*-eket keressük, amelyek esetén a függvény képe az *x* tengely fölött halad vagy illeszkedik rá.



Az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenletnek *a*; *b* és *c* értékétől függően 0, 1 vagy 2 gyöke lehet:

- ha nincs gyök, akkor $M = \emptyset$;
- ha egy gyök van, akkor $M = \{x_{1,2}\}$;
- ha két gyök van, akkor $M = [x_1; x_2]$.

A többi típusba tartozó egyenlőtlenséget hasonló módon oldjuk meg.

Kétismeretlenes másodfokú egyenlőtlenségek grafikus megoldása különböző kúpszeletek külső vagy belső pontjai alkotta síkrész megkeresését jelenti, ezekkel most nem foglalkozom – önálló témakör lehetne.

Alkalmazások

A matematikán belül jellemző módon szélsőérték-feladatok megoldására, adott tulajdonságú ponthalmazok megkeresésére, geometriai bizonyításokra (Apollóniusz-kör, súlypont stb.) használjuk.

Néhány fizikai alkalmazás:

- a csillagászatban az égitestek mozgásának leírása, pályaegyenletük felírása;
- geometriai optika (gömb- és parabolatükrök, lencsék);
- a ferde hajítások leírása;
- statika (az építészetben különböző alakú kupolák, hidak tervezése stb.).

20. tétel: Térelemek távolsága és szöge. Térbeli alakzatok. Felszín- és térfogatszámítás.

A geometriában a *pont*ot, az *egyenes*t és a *sík*ot tekintjük *térelem*nek. Ahhoz, hogy ezek *távolság*át meg tudjuk határozni, célszerű magát a távolságot meghatározni.

D: Két pont távolságán az azokat összekötő szakasz hosszát értjük.

A definícióból következik, hogy $\forall P;Q$ pont esetén $d(P;Q) \geq 0$, és egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $P = Q$.

D: Két (nem üres) ponthalmaz távolságán a halmazok pontjai közti távolságok *legnagyobb alsó korlát*ját értjük: Ha A és B két ponthalmaz, akkor $d(A;B) = \inf(d(a;b))$, ahol $a \in A$ és $b \in B$.

Például a számegyenesen ha

- $A = \{a \in \mathbb{R} | a \leq 0\}$ és $B = \{b \in \mathbb{R} | b \geq 1\}$, akkor $d(A;B)=1$;
- $A = \{a \in \mathbb{R} | a < 0\}$ és $B = \{b \in \mathbb{R} | b > 1\}$, $d(A;B)$ akkor is 1.

Térelemek távolsága

Ezek után a kérdezett távolságok (d):

(1) *pont és pont* távolságát már definiáltuk;
(2) *pont és egyenes* távolsága
- ha a pont illeszkedik az egyenesre, akkor $d = 0$;
- ha a pont nem illeszkedik az egyenesre, akkor a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hossza;

(3) *pont és sík* távolsága
- ha a pont illeszkedik a síkra, akkor $d = 0$;
- ha a pont nem illeszkedik a síkra, akkor a pontból a síkra bocsátott merőleges szakasz hossza;

(4) *egyenes és egyenes* távolsága
- ha a két egyenes egybeeső vagy metsző, akkor $d = 0$;
- ha a két egyenes párhuzamos, akkor az egyenesekre bárhol állított merőleges egyenes párhuzamos egyenesek közti szakaszának hossza;
- ha a két egyenes kitérő, akkor létezik pontosan egy egyenes, amely mindkét egyenest merőlegesen metszi (*normál transzverzális*); a két kitérő egyenes távolsága a normál transzverzálison lévő metszéspontok távolsága;

(5) *egyenes és sík* távolsága
- ha az egyenes illeszkedik a síkra vagy döfi azt, akkor $d = 0$;
- ha az egyenes párhuzamos a síkkal, akkor az egyenes egy tetszőleges pontjának a síktól való távolsága;

(6) *sík és sík* távolsága
- ha a két sík egybeeső vagy metsző, akkor $d = 0$;
- ha a két sík párhuzamos, akkor az egyik sík egy tetszőleges pontjának a másik síktól való távolsága.

Térelemek szöge

Pont más térelemmel bezárt szögét nem értelmezzük.

D: Két metsző egyenes hajlásszögén a keletkező négy szögtartomány közül a *nem nagyobb*akat értjük. Ha a négy szög megegyezik, akkor azt mondjuk, hogy az egyenesek *merőleges*ek egymásra.

Így a kérdezett szögek (α):

(1) egyenes és egyenes hajlásszöge:
- ha az egyenesek egybeesők vagy párhuzamosak, akkor $\alpha = 0^o$ (esetleg 180^0);
- metsző egyenesek szögét már definiáltuk;
- kitérő egyenesek hajlásszögén azt a szöget értjük, amelyet egy adott ponton át velük párhuzamosan húzott metsző egyenesek zárnak be;

(2) egyenes és sík hajlásszöge:
- ha az egyenes illeszkedik a síkra, vagy párhuzamos vele, akkor $\alpha = 0^o$ (esetleg 180^0);
- ha az egyenes döfi a síkot, akkor az egyenes és a sík döféspontra illeszkedő egyenesei által bezárt szögek minimumát. Ez az egyenes és az egyenes síkra eső merőleges vetületének szöge.

(3) sík és sík hajlásszöge:
- ha a síkok egybeesők vagy párhuzamosak, akkor $\alpha = 0^o$ (esetleg 180^0);
- metsző síkok hajlásszöge az a szög, amelyet úgy kapunk meg, hogy a metszésvonal bármely pontjában merőleges állítunk arra mindkét síkban, és e merőlegesek szögét tekintjük.

Térbeli alakzatok

Térbeli alakzaton általában a tér azon pontjainak halmazát értjük, amelyeket egy zárt felület határol (*test*ek), illetve magát a felület pontjait, például:

D: A *gömb* azon pontok halmaza a térben, amelyek a tér egy adott pontjától (*középpont*) adott távolságra (*sugár*) vannak.

Tehát a *gömb* definíció szerint egy *felület*, de amikor ennek felszínéről vagy térfogatáról beszélünk, akkor magát a *test*et értjük alatta (*felszíne csak testnek lehet*).

A testeket többféle szempont szerint csoportosíthatjuk.

A testek lehetnek konvexek (például a *gömb*) vagy konkávok (például a *tórusz*), tömörek (például tekegolyó) vagy üregesek (például teniszlabda).

A határoló felületek lehetnek síkidomok és/vagy síkba kiteríthető felületek (poliéderek, hengerszerű és kúpszerű testek stb.), illetve síkba nem kiteríthető felületek (gömb, ellipszoid stb.).

Származtatásuk szerint lehetnek például forgástestek (ellipszoid) vagy csonkolt testek (például csonka gúla), de beszélünk egyenes és ferde testekről, szabályos (például szabályos négyoldalú gúla, piramis) testekről is.

A testek között fontos helyet foglalnak el a poliéderek (sokszögek határolta testek).

T: A konvex poliéderek csúcsai és lapjai számának összege kettővel nagyobb az élek számánál (Euler).

Ide tartoznak a *Platón-féle szabályos testek* is:

D: Azokat a konvex poliédereket nevezzük szabályosnak, amelyeket egybevágó szabályos sokszögek határolnak, továbbá élszögeik és lapszögeik egyenlők.

Öt Platón-féle szabályos test van: a szabályos tetraéder, hexaéder, oktaéder, dodekaéder és ikozaéder, ezeket rendre szabályos háromszögek, négyszögek, háromszögek, ötszögek és háromszögek határolják.

Ha a szabályos testek lapközéppontjait összekötjük, újra szabályos testet kapunk: tetraéder → tetraéder; hexaéder → oktaéder; oktaéder → hexaéder; dodekaéder → ikozaéder; ikozaéder → dodekaéder.

Testek felszíne

Síkidomok és/vagy síkba kiteríthető felületekkel határolt testek felszínén (*A*) a határoló felületek területének összegét értjük.

Szokás a test alaplapjáról, fedőlapjáról és palástjáról beszélni (például egyenes csonka körkúp), ezek felszínét a részek területének kiszámítása után összegzéssel kapjuk – $A = T + t + P$.

Ha a testnek van síkba ki nem teríthető felülete is (például félgömb), akkor ezek felszínét a beírt és köré írt poliéderek felszínének (megegyező) határértékeként értelmezzük. Forgástestek felszínét integrálszámítással is meg tudjuk határozni.

Néhány gyakrabban előforduló test felszíne:

- téglatest: $A = 2(ab + bc + ca)$, ahol *a*; *b* és *c* az egy csúcsba futó élek hossza;
- egyenes körkúp: $A = r\pi(r + a)$, ahol *r* az alapkör sugara, *a* a kúp alkotója;
- egyenes csonka körkúp: $A = \pi\left(R^2 + r^2 + (R + r)a\right)$, ahol *R* az alapkör, *r* a fedőkör sugara, *a* pedig a csonka körkúp alkotójának hossza;
- gömb: $A = 4r^2\pi$, ahol r a gömb sugara.

Testek térfogata

Középiskolában a térfogatot a következőképpen határozzuk meg:

D: Elfogadjuk, hogy létezik olyan, a tér halmazain (*testek*) értelmezett, nemnegatív értékű *V* függvény (*térfogat*), amely eleget tesz a következő feltételeknek:

- egymásba nem nyúló testek együttes térfogata a testek térfogatának összege;
- egybevágó testek térfogata megegyezik;
- az egységkocka térfogata 1.

A térfogat definíciójának felhasználásával bizonyíthatóak a következő tételek:

T: Az *a* oldalú kocka térfogata $V = a^3$.

T: Az *a, b* és *c* oldalú téglatest térfogata $V = abc$.

T: A *T* alapterületű, *m* magasságú hengerszerű testek térfogata $V = Tm$.

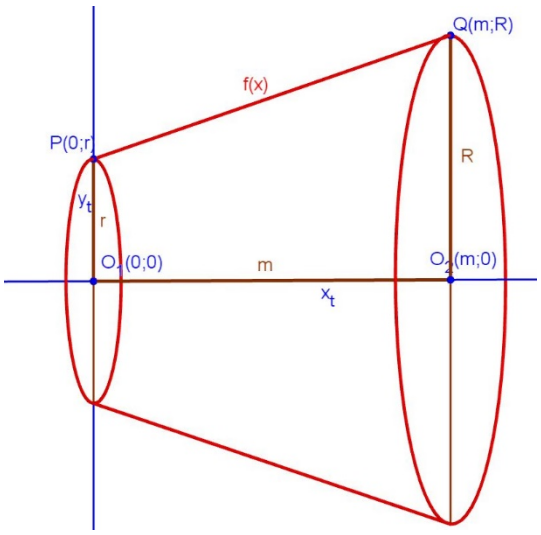
T: A *T* alapterületű, *m* magasságú kúpszerű testek térfogata $V=\frac{Tm}{3}$.

T: A *T* alapterületű, *t* fedőterületű, *m* magasságú csonka kúpok térfogata $V=\frac{m}{3}\left(T+t+\sqrt{Tt}\right)$.

A következőkben az egyenes csonka körkúp térfogatára vonatkozó tételt bizonyítom.

Tétel: Az egyenes csonka körkúp térfogata $V=\frac{\pi m}{3}\left(R^2+r^2+Rr\right)$, ahol *R* az alapkör, *r* a fedőkör sugara és *m* csonka körkúp magassága.

Bizonyítás: A bizonyításban felhasználom, hogy ha az $f(x)$ függvény az $[a;b]$-on folytonos, és ott $f(x)\geq 0$, akkor az *x* tengely körüli megforgatásakor kapott test térfogata $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$. HÁJ!



A csonka kúpot úgy kapjuk meg, ha a *PQ* szakaszra illeszkedő lineáris függvényt a [0; *m*]-on megforgatjuk az x tengely körül. Az $f(x)$ függvényt $f(x)=ax+b$ alakban keressük.

$P(0;r)\in f(x) \quad\Rightarrow\quad r=a\cdot 0+b;$

$Q(m;R)\in f(x) \quad\Rightarrow\quad R=am+b.$

Innen *b* = *r*, illetve $a=\frac{R-r}{m}$, amelyből

$f(x)=\frac{R-r}{m}x+r.$

Tehát a csonka kúp térfogata

$$V=\pi\int_0^m\left(\frac{R-r}{m}x+r\right)^2dx.$$

$$V=\pi\int_0^m\left(\frac{R-r}{m}x+r\right)^2dx=\pi\int_0^m\left(\left(\frac{R-r}{m}\right)^2x^2+2r\frac{R-r}{m}x+r^2\right)dx=\pi\left(\frac{R-r}{m}\right)^2\int_0^m x^2dx+2r\pi\frac{R-r}{m}\int_0^m xdx+r^2\pi\int_0^m dx=$$

$$=\pi\left(\frac{R-r}{m}\right)^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^m+\pi 2r\frac{R-r}{m}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^m+\pi r^2\left[x\right]_0^m=\pi\left(\frac{R-r}{m}\right)^2\frac{m^3}{3}+2r\pi\frac{R-r}{m}\frac{m^2}{2}+r^2\pi m=$$

$$=\frac{R^2-2Rr+r^2}{3}\pi m+r\left(R-r\right)\pi m+r^2\pi m=\frac{\pi m}{3}\left(R^2-2Rr+r^2+3rR-3r^2+3r^2\right)=\frac{\pi m}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right).\ //$$

Alkalmazások

Csak a műszaki élet területéről hozok példákat:

- *hajlásszögek és távolságok*: utak, autópályák tervezésekor figyelni kell a domborzatra (nyomvonal-kijelölés), a megengedett legnagyobb süllyedési és emelkedési szögek betartására; törekedni kell a legrövidebb távolságok meghatározására is (építési költségek);
- *térfogat*: a testek tömegének meghatározása az anyagsűrűség függvényében szintén fontos feladat (statika);
- *térfogat és felszín*: különböző termékek kiszerelésének optimális meghatározása (minimális térfogat a szállításhoz, minimális felszín a csomagoláshoz, a legjobb alak megtalálása).

21. tétel: Területszámítás elemi úton és az integrálszámítás felhasználásával.

A *terület* a síkidomok kiterjedését jellemző mennyiség, a fogalom *térbeli* megfelelője a testek *felszíne*.

Már *Eukleidész* is foglalkozott ezzel az Elemekben, de magát a területet sem az alapfogalmak között nem sorolta fel, sem másutt nem definiálta, két sokszöget egyenlő területűnek mondott, ha egymásba átdarabolhatók, azaz az egyiket véges sok részre vágva a kapott darabokból a másik lefedhető és viszont.

Eudoxosz kimerítéses módszerét alkalmazva *Arkhimédész* már elég precízen terjesztette ki a görbevonalú alakzatokra is a területegyenlőség fogalmát, de a fogalmat már előtte is használták, például khioszi *Hippokratész* a róla elnevezett holdacskák területének kiszámításakor.

A későbbiekben *Bonaventura Cavalieri*, *Blaise Pascal*, *Pierre de Fermat*, *Isaac Newton* és *Gottfried Wilhelm Leibniz* foglalkozott kimerítően ezzel a témával.

A terület modern definíciója *Camille Jordan*tól és *Giuseppe Peano*tól származik a 19. század végéről, amelyet a 20. század elején *Henri Lebesgue* tökéletesített, kiterjesztve a középiskolában tanult *Riemann-integrál* fogalmát (*Lebesgue-integrál*).

Középiskolában a területet a következőképpen határozzuk meg:

D: Elfogadjuk, hogy létezik olyan, a sík halmazain (*síkidomok*) értelmezett, nemnegatív értékű *t* függvény (*terület*), amely eleget tesz a következő feltételeknek:

- egymásba nem nyúló síkidomok együttes területe a síkidomok területének összege;
- egybevágó síkidomok területe megegyezik;
- az egységnégyzete területe 1.

Sokszögek területe

A terület definíciójának felhasználásával bizonyíthatóak a következő tételek:

T: Az *a* oldalú négyzet területe $t = a^2$.

T: Az *a* és *b* oldalú téglalap területe $t = ab$.

T: Az *a* oldalú, m_a magasságú paralelogramma területe $t = am_a$.

Mivel minden sokszög felbontható háromszögekre, ezért különös fontos a háromszögek területének kiszámítása. Ezt a háromszög különböző adatainak ismeretében a következőképpen tehetjük meg:

T: A háromszög területe a szokásos jelölésekkel

$$t = \frac{am_a}{2} = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = rs = \frac{abc}{4R}.$$

Feladatok megoldása során gyakran számítjuk ki a háromszög területét a megadott adatok segítségével, hogy ezután a háromszög egy másik területképletéből határozzuk meg a keresett mennyiséget. Nagyon sokszor találkozunk egyenlő oldalú háromszögekkel problémák megoldása során, ennek területe $t = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Néhány további nevezetes sokszög területképlete a szokásos jelölésekkel:

- paralelogramma: $t = ab\sin\gamma = \frac{ef}{2} = \frac{ef\sin\phi}{2}$;
- trapéz: $t = \frac{a+c}{2}m = km$;
- deltoid: $t = \frac{ef}{2}$;
- rombusz: $t = a^2\sin\gamma = \frac{ef}{2}$;
- húrnégyszög: $t = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$;
- érintőnégyszög: $t = rs$;
- *n* oldalú szabályos sokszög: $t = n\frac{a^2 ctg\frac{180^\circ}{n}}{4}$.

Görbe vonallal határolt síkidomok területének meghatározása

E síkidomok területét általában kétféle módon tudjuk meghatározni: a síkidomba beírt és a körülírt sokszögek területének határértékeként, illetve az integrálszámítás felhasználásával.

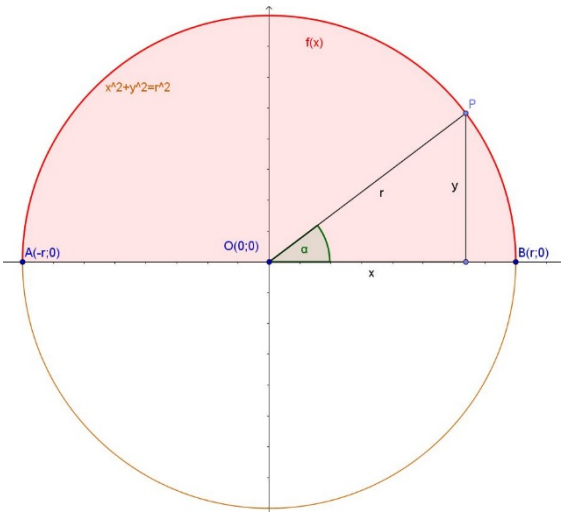
T: Legyen *f(x)* az [*a*; *b*]-on értelmezett, nemnegatív értékű, folytonos függvény. Az *x = a*, *x = b*, *y = f(x)* görbék és az *x* tengely határolta síkidom területe $t = \int_a^b f(x)dx$.

Ha *f(x)*-től nem követeljük meg, hogy nemnegatív értékű legyen, akkor a fenti határozott integrál a görbe és az *x* tengely határolta síkidomok területének *előjeles összeg*ét adja.

E tétel segítségével bizonyítom, hogy:

Tétel: Az *r* sugarú kör területe $t = r^2\pi$.

Bizonyítás: Helyezzünk a kör síkjára egy *xy* koordináta-rendszert úgy, hogy annak origója a kör középpontja legyen, és használjuk az ábra jelöléseit!



A kör egyenlete ekkor $x^2 + y^2 = r^2$, a kör *x* tengely feletti ívének egyenlete pedig $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. A *félkör terület*ét emiatt az $\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}dx$ határozott integrállal tudjuk kiszámítani.

$$\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}dx = 2\int_{0}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}dx = \rightarrow$$

Végezzük el az $x = r\cos\alpha$ helyettesítést, ekkor $dx = -r\sin\alpha d\alpha$, így

$$\rightarrow = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{r^2 - r^2\cos^2\alpha}\,(-r\sin\alpha)d\alpha = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} r^2\sin^2\alpha d\alpha = 2r^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\alpha}{2} d\alpha = r^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos 2\alpha\right) d\alpha =$$

$$= r^2\left[\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = r^2\left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin\pi}{2}\right) - \left(0 - \frac{\sin 0}{2}\right)\right) = \frac{r^2\pi}{2}.$$

A kör területe ennek kétszerese, tehát $t = r^2\pi$. **//**

Két folytonos függvény által határolt síkidom területét – függetlenül attól, hogy az az *x* tengelyhez viszonyítva hol található – úgy határozzuk meg, hogy kiszámítjuk a két függvény legtávolabbi metszéspontjait, majd e kettő közötti intervallumon integráljuk a két függvény különbségét, és annak vesszük az abszolút értékét:

$$t = \left|\int_{x_1}^{x_2} \left(f(x) - g(x)\right)dx\right| .$$

A kör részeinek területe

A kör területképletének ismeretében könnyen számíthatjuk a körcikk (és a körszelet) területét is, felhasználva, hogy a körcikk területe és ívhossza egyenesen arányos a középponti szögével:

$$t_{kc} = \frac{ri}{2} = \frac{r^2\widehat{\alpha}}{2} = \frac{r^2\alpha^\circ}{360^\circ} .$$

Konkrét feladatokban képletek helyett célszerűbb a negyedik arányos számításával meghatározni a körcikk területét:

$$\begin{array}{ccc} t_{kc} & & \widehat{\alpha} \\ & \text{X} & \\ r^2\pi & & 2\pi \end{array} .$$

A körszelet területének meghatározásakor pedig, ha annak középponti szöge konvex, akkor előbb kiszámítjuk a hozzátartozó körcikk területét, majd abból kivonjuk a kettő különbségét alkotó egyenlő szárú háromszög területét. Ha a középponti szög konkáv, akkor előbb célszerűen kiszámoljuk a neki megfelelő konvex szöghöz tartozó körszelet területét, és azt kivonjuk a kör területéből.

Körgyűrűk, körgyűrűcikkek területét szintén a kör és részei területére célszerű visszavezetni.

Alkalmazások:

A területszámítás a matematika egyik leggyakoribb alkalmazási területe a hétköznapi életben, például lakásépítésnél, -felújításnál a szükséges burkolóanyagok mennyiségének kiszámítására.

A fizikában is sok helyütt használjuk: változó erő munkájának kiszámítására (rugó energiája, táguló gáz munkája, gravitációs potenciális energia stb.), továbbá a változó sebességű mozgások során megtett út kiszámítására, a váltakozó áram effektív teljesítményének (az effektív áramerősségnek és feszültségnek) a meghatározására – és hosszan lehetne sorolni még.

22. tétel: Kombinációk. Binomiális tétel, a Pascal-háromszög. A valószínűség kiszámításának kombinatorikus modellje. A hipergeometrikus eloszlás.

A 16. században Génua városállam nagytanácsa, a szenátorok kormányzó testülete oly módon újult meg, hogy tagjai köréből évenként öten kiváltak. Az öt megüresedett helyre előbb 120, később 90 jelölt közül, sorsolás útján delegálták az új szenátorokat. A génuai polgárság évről évre izgatottan várta az ünnepélyes választásokat, és persze szinte mindannyian fogadásokat kötöttek az öt polgár személyére. Aki legalább két új tanácstag nevét eltalálta, már valamilyen mértékű jutalomhoz juthatott. A legtöbbet természetesen az a fogadó vághatta zsebre, aki mind az öt újdonsült szenátor nevét megjósolta. A fogadások olyan népszerűvé váltak, hogy külön iroda, majd később irodahálózat szervezésére volt szükség.

Ez a „játék" manapság lottó néven közismert és közkedvelt: 90 szám közül kell kiválasztani 5-öt úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít. A matematikában az ilyen típusú kiválasztásokat kombinációnak nevezzük.

D: Ha *n* elem közül kiválasztunk *k* elemet ($k \le n$) úgy, hogy minden elem legfeljebb egyszer választható, és nem számít a kiválasztás sorrendje, akkor az *n* elem egy *k*-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációját kapjuk.

T: *n* elem *k*-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma $C_n^k = \frac{V_n^k}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$.

A fenti módon definiált $\binom{n}{k}$ jelölést *binomiális együttható*nak nevezzük.

D: Ha *n* elem közül kiválasztunk *k* elemet ($k \le n$) úgy, hogy minden elem többször is választható, és nem számít a kiválasztás sorrendje, akkor az *n* elem egy *k*-ad osztályú ismétléses kombinációját kapjuk.

T: *n* elem *k*-ad osztályú ismétléses kombinációinak száma $C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}$.

A binomiális együttható elnevezést a következő, *binomiális tétel* indokolja, amely egy kéttagú összeg pozitív egész kitevőjű hatványára vonatkozik:

Tétel: Ha *n* pozitív egész szám, akkor $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Bizonyítás: Ha *n* = 1, akkor $(a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b$, igaz a tétel állítása.

$n \ge 2$ esetén $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n\,darab}$. Végezzük el a szorzást! A zárójelfelbontás szabálya miatt (minden tagot minden taggal meg kell szorozni) a kapott összeg minden tagja $a^{n-k}b^k$ alakú lesz. Ilyen tagot annyiszor kapunk, ahányféleképpen az *n* darab tényezőből ki tudunk választani *k* darabot (ezekből a *b*-t vesszük szorzótényezőként, a többiből pedig az *a*-t) úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít. Ezek száma $C_n^k = \binom{n}{k}$, tehát a bizonyítandó állítást kapjuk. **//**

Szintén a binomiális együtthatókkal találkozunk Blaise Pascal francia szerzetes, filozófus, fizikus és matematikus híres háromszögében. Itt minden tagot úgy kapunk meg, hogy összeadjuk a fölötte lévő kettőt.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

.....*s.í.t.*.....

További érdekes tulajdonságait vehetjük észre a binomiális együtthatóknak:

T:

(1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (*szimmetrikus*);

(2) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ (*a Pascal-háromszög képzési szabálya*).

T: *n* elemű halmaz *k* elemű részhalmazainak száma $\binom{n}{k}$.

T: *n* elemű halmaz részhalmazainak száma $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{k} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$. (*Ez a binomiális tétel alkalmazása az a = b = 1 esetre, továbbá a Pascal-háromszög n + 1-dik sorában szereplő számok összege.*)

A valószínűség kiszámításának kombinatorikus modellje

Szintén a 17. században élt Blaise Pascalhoz köthető a véletlen jelenségek matematikai eszközökkel való vizsgálatának létrejötte, a valószínűségszámítás kezdete. Ennek modern, axiomatikus megalapozását és kidolgozását Andrej Nyikolajevics Kolmogorov végezte el a 20. század 30-as éveiben.

D: Legyen *H* egy nem üres halmaz. A *H* halmaz neve *eseménytér*.

- Az eseménytér részhalmazait *esemény*eknek nevezzük.
- Az $\emptyset \subseteq H$, ezért az $\emptyset$ esemény, a neve *lehetetlen esemény*.
- A $H \subseteq H$, ezért a *H* esemény, a neve *biztos esemény*.
- A H egyelemű részhalmazai az *elemi esemény*ek.

Az események között *műveletek*et definiálunk a halmazműveletek segítségével:

D: Legyen *H* egy eseménytér, és *A* és *B* tetszőleges események *H*-ban.

(1) $A + B = A \cup B$ (2) $A \cdot B = A \cap B$

(3) $A - B = A \setminus B$ (4) $\overline{A} = H - A$

(5) *Ha* $A \cdot B = \emptyset$, *akkor A és B kizáró események*.

Az események összege és szorzata kommutatív és asszociatív, továbbá igazak rájuk a De Morgan-azonosságok.

A *Kolmogorov-axiómák*: Legyen *H* egy eseménytér. Létezik az eseménytér eseményeinek halmazán értelmezett *P* függvény, amelyre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

I. Bármely A eseményre $0 \le P(A) \le 1$.

II. $P(H) = 1$.

III. Ha $A_1; A_2; ...; A_n$ egymást páronként kizáró események, akkor
$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$

D: A *P* függvény neve valószínűség.

Ezek után rátérek a valószínűségszámítás kombinatorikus modelljének ismertetésére.

D: Ha a *H* eseménytér nem üres véges halmaz, és minden elemi eseményének valószínűsége egyenlő, akkor ezt az eseményteret az eseményeivel és a rajtuk értelmezett műveletekkel együtt *klasszikus valószínűségi mező*nek nevezzük.

A kombinatorikus valószínűségek általában ilyen tulajdonságúak (pénzfeldobás, kockadobás, kártyalapok kihúzása stb.).

T: Ha *H* klasszikus valószínűségi mező, és elemi eseményeinek száma ($|H| =$) *n*, akkor az elemi események valószínűsége $\frac{1}{n}$.

T: Ha *H* klasszikus valószínűségi mező, továbbá $|H| = n$, és az A eseményre igaz, hogy $|A| = k$, akkor $P(A) = \frac{k}{n}$.

Fentiek alapján tudjuk egy kombinatorikus valószínűség értékét meghatározni a következő tört értékeként: $p = \frac{\textit{kedvező esetek száma}}{\textit{összes eset száma}}$.

A hipergeometriai eloszlás

Tekintsünk most egy olyan „lottójátékot”, ahol *N* (35, 45, 90) elem közül kell *n* (7, 6, 5) elemet kiválasztani úgy, hogy minden elemet csak egyszer választhatunk, és nem számít a kiválasztás sorrendje (skandináv, hatos és ötös lottó). A *ξ* valószínűségi változó értékei legyenek a találatok számai $i \in \{0;1;2;...;n\}$. Ekkor annak valószínűsége, hogy *i* találatunk lesz $P(\xi = i) = \frac{\binom{n}{i} \cdot \binom{N-n}{n-i}}{\binom{N}{n}}$.

Ha *N* elem között *s* a „jó” elemek száma, és *n* $(n \le s \le N)$ elemet választunk ki úgy, hogy minden elemet csak egyszer választhatunk, és nem számít a kiválasztás sorrendje, továbbá a *ξ* valószínűségi változó értékei legyenek a találatok számai $i \in \{0;1;2;...;n\}$, akkor az *i* találat valószínűsége

$$P(\xi = i) = \frac{\binom{s}{i} \cdot \binom{N-s}{n-i}}{\binom{N}{n}}.$$

Az ilyen típusú ξ valószínűségi változókat nevezzük hipergeometrikus eloszlásúaknak. (*A ξ valószínűségi változó értékeihez tartozó valószínűségek halmazát nevezzük a ξ eloszlásának.*)

Gyakorlati alkalmazások:

Kombinációkkal sok helyütt találkozunk, például a szerencsejátékokban (a különböző lottók), a pókerközvetítések közben is ennek segítségével számolják játék közben az egyes játékosok nyerési esélyeit. Kedvelt példa, ha fagylaltot kérünk kehelybe.

Valószínűségszámítással kalkulálják a díjakat a különböző életbiztosításokban, gépjármű-felősségbiztosításokban. A különböző gyárak minőségbiztosításában fontos szerepet játszik a gyártás közbeni mintavételes minőség-ellenőrzés, elvileg az erre jellemző értékeket a hipergeometrikus eloszlás szerint kellene számolni.

Hipergeometrikus eloszlás esetén azonban a várható értéket az $M(\xi)=n\cdot\frac{s}{N}$, illetve a szórást a $D(\xi)=\sqrt{n\cdot\frac{s}{N}\cdot\frac{N-s}{N}\cdot\frac{N-n}{N-1}}$ képlettel lehet meghatározni, ezekből kellene a gyártás „jóságára” visszakövetkeztetni, ami igen nehéz feladat. Mivel azonban a gyakorlatban a mintát általában a nála jóval nagyobb elemszámú vizsgálati anyagból veszik, így a binomiális eloszlás is jól közelíti ezen értékeket. Így a gyártási folyamat „jóságára” (valószínűségére) a többszöri mintavétel alapján, a binomiális eloszlással számolt várható értékből és szórásból határozzák meg ($p=1-\frac{D^2(\xi)}{M(\xi)}$).

23. tétel: Permutációk, variációk. A binomiális eloszlás. A valószínűség kiszámításának geometriai modellje.

A klasszikus kombinatorika egy véges halmaz (adatsokaság) elemeinek (adatainak) adott szempontok szerinti sorba rendezésével, más megfogalmazással az elemek (adatok) adott szempontok szerinti lehetséges kiválasztásával, ezek számával foglalkozik.

A könnyebb és egyszerűbb leírás miatt definiáljuk a *faktoriális* műveletet!

D: $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $n! := \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, & \text{ha } n \geq 2; \\ 1, & \text{ha } n < 2. \end{cases}$

D: Az *n* elemű halmaz elemeinek egy sorba rendezését az *n* elem (egy) permutációjának nevezzük.

Tétel: Az *n* elemű halmaz összes permutációinak száma $P_n = n!$

Bizonyítás: Az állítást *n* szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

I. *n* = 0 esetén az üres halmaz „elemeit" kell sorba rendezni, ezt egyféle módon tehetjük meg (sehogy).
n = 1 esetén az egy elemet szintén egyféle módon tudjuk sorba rendezni, úgy, hogy leírjuk.

II. Tegyük föl, hogy *n* = *k* esetén a *k* elem lehetséges sorba rendezéseinek száma *k*!.

III. Belátjuk, hogy *n* = *k* + 1 esetén a *k* + 1 elem lehetséges sorba rendezéseinek száma (*k* + 1)! Gondolatban vegyünk ki egy elemet a *k* + 1 elem közül! A maradék *k* elemet *k*! féleképpen lehet sorba rendezni. A gondolatban kivett egy elemet egy ilyen sorba rendezésbe *k* + 1 helyre tehetjük: a *k* elem közti *k* – 1 helyre, vagy a sorba rendezés elejére, vagy a sorba rendezés végére, így a *k* + 1 elem egy sorba rendezését kapjuk. Azaz a *k* elem egy sorba rendezéséből a *k* + 1 elem *k* + 1 sorba rendezését kapjuk, tehát $P_{k+1} = P_k \cdot (k+1) = k! \cdot (k+1) = (k+1)!$ **//**

Ha a sorba rendezendő elemek között vannak egyformák, akkor nem halmazról, hanem adatsokaságról beszélünk (egy halmazban egy elem egyszer fordul elő).

D: Az *n* adatból álló adatsokaság adatainak egy sorba rendezését az *n* adat (egy) ismétléses permutációjának nevezzük.

T: Az *n* elemű adatsokaság összes ismétléses permutációinak száma

$$P_n^i = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_l)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_l!} \quad (n = k_1 + k_2 + \ldots + k_l).$$

(*Ha* $k_1 = k_2 = \ldots = k_l = 1$, *azaz az adatok közt nincsenek egyformák, a képlet akkor is helyesen adja meg a permutációk számát.*)

A sorba rendezések egy másik fajtáját a variációk jelentik, ezt már kiválasztásként definiáljuk.

D: Ha egy *n* elemű halmazból kiválasztunk *k* elemet ($k \leq n$) úgy, hogy egy elemet csak egyszer egy választhatunk, és számít a kiválasztás sorrendje, akkor az *n* elem egy *k*-ad osztályú ismétlés nélküli variációját kapjuk.

T: *n* elem *k*-ad osztályú ismétlés nélküli variációinak száma $V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

(*k = n esetén nyilván az n elem egy permutációját kapjuk, ekkor* $V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$.)

D: Ha egy *n* elemű halmazból kiválasztunk *k* elemet úgy, hogy egy elemet többször is választhatunk, és számít a kiválasztás sorrendje, akkor az *n* elem egy *k*-ad osztályú ismétléses variációját kapjuk.

T: *n* elem *k*-ad osztályú ismétléses variációinak száma $V_n^{k,i} = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k\,darab} = n^k$.

A binomiális eloszlás

Ebben a tételben nem feladatunk a valószínűség teljes értelmezése, ezért csak azokkal a fogalmakkal és tételekkel foglalkozom, amelyek a címben megjelölt fogalomra vonatkoznak.

A binomiális eloszlás egy klasszikus feladata, hogy ha egy szabályos dobókockát ötször feldobunk, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan kétszer dobunk 6-ost. A hatosdobás valószínűsége $p = \frac{1}{6}$, a nemhatos-dobás valószínűsége nyilván $\overline{p} = 1 - p = \frac{5}{6}$. A *binomiális* elnevezést az indokolja, hogy egy eseménynek két, egymást kizáró kimenetele van.

A következőkben néhány fogalmat definiálok:

D: Az olyan függvényt, amelynek értelmezési tartománya egy eseménytér elemi eseményeinek halmaza, képhalmaza pedig a valós számok halmaza, valószínűségi változónak nevezünk.

D: A valószínűségi változó értékkészlete a lehetséges értékeinek halmaza.

D: A *ξ* („kszi”) véges valószínűségi változó lehetséges értékeinek halmaza legyen $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$. Ekkor a $P(\xi = x_i)$ valószínűségek halmazát a *ξ* eloszlásának nevezzük.

A valószínűségi változók jellemzésére gyakorlati okokból két nevezetes értéket használunk: a valószínűségi változó *várható érték*ét és a *szórás*át.

Ha igaz az az állítás, hogy az események relatív gyakorisága sok kísérlet esetében a valószínűséghez nagy eséllyel közel van, akkor sok kísérlet esetében a kimentelek átlaga nagy eséllyel a súlyozott középhez lesz közel. Ez indokolja a várható érték alábbi definícióját:

D: Ha a *ξ* valószínűségi változó lehetséges értékeinek halmaza $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$, akkor az $M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(\xi = x_i)$ összeget a valószínűségi változó várható értékének nevezzük.

A várható értéktől való eltérés jellemzésére a valószínűségi változó szórását vezetjük be:

D: Ha a *ξ* valószínűségi változó várható értéke $M(\xi)$, akkor az $\eta = (\xi - M(\xi))^2$ valószínűségi változó várható értékét a *ξ* szórásnégyzetének nevezzük. A ξ szórása $D(\xi) = \sqrt{M\left((\xi - M(\xi))^2\right)}$.

A szórás kiszámítását sok esetben megkönnyíti a következő tétel:

T: Ha a *ξ* valószínűségi változó várható értéke $M(\xi)$, szórása $D(\xi)$, akkor $D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi)$.

Ezek után definiálom a binomiális eloszlású valószínűségi változót:

D: Ha a ξ valószínűségi változó lehetséges értékeinek halmaza $\{0;1;2;...;n\}$, ahol n pozitív egész szám, és eloszlása $P(\xi = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$, ahol $0 \le p \le 1$ valós szám, akkor a ξ binomiális eloszlású valószínűségi változó (*n* és *p* a valószínűségi változó paraméterei).

Nem bizonyítom a következő tételt:

T: Ha ξ n és *p* paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, akkor $M(\xi) = np$, illetve $D(\xi) = \sqrt{np(1-p)}$.

Kiinduló feladatunk ilyen eloszlást mutat (a kedvező esetek száma/az összes eset száma hányadosának kombinatorikai úton történő meghatározása alapján is):

$\xi = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{3125}{7776} & \frac{3125}{7776} & \frac{1250}{7776} & \frac{250}{7776} & \frac{25}{7776} & \frac{1}{7776} \end{Bmatrix}$, a keresett valószínűség $\frac{1250}{7776}$, $M(\xi) = 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ és $D(\xi) = \sqrt{5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)} = \frac{5}{6}$.

Vegyük észre, hogy visszatevéses mintavétel esetén a binomiális eloszlás alkalmazható.

A valószínűség kiszámításának geometriai modellje

D: Ha az eseménytér nem megszámlálható halmaz, de mérhető (például van hossza, területe vagy térfogata), az eseményei mérhetők, és valószínűségük egyenesen arányos a méretükkel, akkor ezt az eseményteret *geometriai valószínűségi mező*nek nevezzük.

Néhány példa geometriai valószínűségi mezőre: céltáblára lövés, Buffon-féle tűprobléma, két ember találkozása megadott időközben, megadott ott tartózkodási idővel.

A Kolmogorov-axiómák segítségével egyszerűen igazolható a következő tétel:

T: Ha egy geometriai valószínűségi mező eseménytere *H*, a rajta értelmezett mérték (például hossz, terület vagy térfogat) μ, akkor bármely *A* eseményre igaz, hogy $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(H)}$.

Alkalmazások:

Variációkkal sok helyütt találkozunk, például a sportfogadásban, ilyen a lóversenyen a hármasbefutó (ismétlés nélküli) vagy a totó (ismétléses).

Valószínűségszámítással kalkulálják a díjakat a különböző életbiztosításokban, gépjármű-felősségbiztosításokban. A különböző gyárak minőségbiztosításában fontos szerepet játszik a gyártás közbeni mintavételes minőség-ellenőrzés, elvileg az erre jellemző értékeket a hipergeometrikus eloszlás szerint kellene számolni, de mivel a gyakorlatban a mintát általában a nála jóval nagyobb elemszámú vizsgálati anyagból veszik, így a binomiális eloszlás is jól közelíti ezen értékeket. A gyártási folyamat „jóságát” (valószínűségét) a többszöri mintavétel alapján számolt várható értékből és szórásból számolják ki: mivel $D(\xi) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{M(\xi) \cdot (1-p)}$, ezért $p = 1 - \frac{D^2(\xi)}{M(\xi)}$.

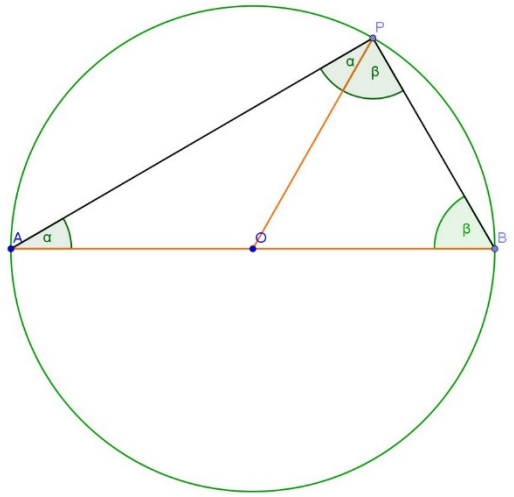
24. tétel: Bizonyítási módszerek és bemutatásuk tételek bizonyításában.

A középiskolai matematikában négyféle bizonyítási módszert szoktunk használni. Ezek közül a leggyakoribb az ún. *direkt bizonyítás*.

D: Direkt bizonyításnak nevezzük azt az eljárást, amikor igaz feltételekből (axiómák, korábban bizonyított tételek), helyes logikai lépések során a bizonyítandó állításhoz jutunk.

Tétel: Ha egy kör egyik átmérőjének két végpontját összekötjük a körvonal átmérővégpontoktól különböző bármely más pontjával, akkor derékszögű háromszöget kapunk (Thalész tétele).

Bizonyítás: **HÁJ!** Be kell látnunk, hogy $BPA\sphericalangle = 90^\circ$.



Mivel $OA = OB = OP$, a kör sugara, ezért az $AOP\Delta$, illetve a $POB\Delta$ egyenlő szárúak, így alapon fekvő szögeik (α, illetve β) megegyeznek. Így az $ABP\Delta$ háromszög belső szögeinek összegére:

$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ$, amelyből

$\alpha + \beta = 90^\circ$, tehát *P*-nél derékszög van. **//**

D: *Indirekt bizonyítás*nak nevezzük azt az eljárást, amikor feltételezzük a bizonyítandó állítás tagadását, majd helyes logikai lépések során ellentmondásra jutunk.

Tétel: A $\sqrt{2}$ irracionális szám.

Bizonyítás:

Tegyük föl, hogy a $\sqrt{2}$ a tétel állításával szemben nem irracionális, hanem racionális szám.

Emiatt a $\sqrt{2}$ felírható $\frac{p}{q}$ alakban, ahol $p;q \in \mathbb{Z}^+$.

Emeljük négyzetre a $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ egyenlőséget (a pozitív számok halmazán a négyzetre emelés ekvivalens művelet)! Így kapjuk, hogy

$2 = \frac{p^2}{q^2}$, amelyből

$2q^2 = p^2$,

ami ellentmond a számelmélet alaptételének, mert mindkét oldalon egész szám áll, a bal oldalon azonban a 2 páratlan hatványon szerepel, míg a jobb oldalon vagy páros hatványon, vagy egyáltalán nem szerepel. **//**

A matematika harmadik nagyon fontos és igen sokszor használt bizonyítási módszere a *teljes indukció*, amellyel általában (valahonnantól kezdve) az összes természetes számra vonatkozó állítást látunk be. A módszer a *teljes indukció elvén* alapul, amely szerint {ha egy állítás teljesül valamely (kezdő) természetes számra}, **és** {ha teljesül egy (a kezdő számnál nem kisebb) természetes számra}, **akkor** teljesül a következőre is (más néven: öröklődik)}, **akkor** {az állítás teljesül az összes, a kezdő számnál nem kisebb természetes számra}.

Tétel: Ha egy számtani sorozat első tagja a_1, különbsége d, akkor a számtani sorozat első n tagjának összege $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n$.

Bizonyítás: n szerinti teljes indukcióval bizonyítunk.

I. $n = 1$ esetén $S_1 = \frac{2a_1 + (1-1)d}{2} 1 = a_1$, azaz igaz a tétel állítása.

II. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén teljesül a tétel állítása, azaz $S_k = \frac{2a_1 + (k-1)d}{2} k$. (*Ezt indukciós feltevésnek nevezzük, amelyet a következő lépésben fel fogunk használni.*)

III. Belátjuk, hogy $n = k + 1$-re is teljesül a tétel állítása, azaz

$$S_{k+1} = \frac{2a_1 + (k+1-1)d}{2}(k+1) = \frac{2a_1 + kd}{2}(k+1).$$

Felhasználjuk, hogy $S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$, illetve $a_{k+1} = a_1 + kd$, így

$$S_{k+1} = \frac{2a_1 + (k-1)d}{2} k + a_1 + kd = \frac{2a_1 k + k(k-1)d}{2} + \frac{2a_1 + 2kd}{2} =$$

$$= \frac{2a_1(k+1) + kd(k-1+2)}{2} = \frac{2a_1(k+1) + kd(k+1)}{2} = \frac{2a_1 + kd}{2}(k+1). \textbf{ //}$$

Végül a negyedik bizonyítási módszer az, amely a *skatulyaelv*en alapszik. E szerint:

T: Ha n darab tárgyat k darab skatulyában helyezünk el, és $n > kp$, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelyikbe legalább $p + 1$ tárgy kerül.

Tétel: Ha p és q pozitív egész számok, akkor a $\frac{p}{q}$ szám tizedes tört alakja vagy véges, vagy végtelen, de szakaszos tizedes tört (*azaz racionális szám*).

Bizonyítás: Osszuk el a „hagyományos” módon a p egész számot a q egész számmal. Az osztás során fellépő lehetséges osztási maradékok 0; 1; 2; … ; $q - 1$ (q darab).

Ha van 0 maradék, akkor az osztás ebben a lépésben befejeződik, azaz a tizedes tört alak véges.

Ha nincs 0 osztási maradék, akkor legfeljebb $q - 1$ darab osztási maradék léphet föl, tehát legfeljebb a q-adik osztásnál már olyan maradékot kapunk, amely korábban már volt, azaz innen ismétlődni fognak a tizedes tört jegyei, így tehát olyan szakaszos tizedes törtet kapunk, ahol a szakasz hossza legfeljebb $q - 1$ hosszúságú. **//**

Gyakorlati alkalmazásként az összes, középiskolában tanult tételt fel lehet hozni, mindegyiket valamelyik fenti módszer segítségével bizonyítottuk.

Egy tréfás feladat búcsúzóul: *Lássuk be, hogy Budapesten 2015-ben legalább 12 olyan ember élt, akiknek ugyanannyi hajszála volt*. (Budapest lakossága ekkor 1.757.000 fő volt, az emberi hajszálak száma pedig – hajszíntől is függően! – 70 és 150 ezer között változik.)

Megjegyzés: Az utóbbi évtizedekben a számítástechnika rohamléptékű fejlődésével megjelentek a *számítógéppel támogatott bizonyítás*ok. Elsőként 1976-ban látta be a négyszín-tételt Kenneth Appel és Wolfgang Haken, míg az 1611-ben megfogalmazott Kepler-sejtést (hogyan lehet egybevágó gömbökkel a legsűrűbben kitölteni egy térrészt) 1998-ban látta be Thomas Hales.

Felhasznált irodalom

1. Ed: Dr. Farkas Miklós (1974). *Matematikai kislexikon*. Budapest: Műszaki Könyvkiadó.
2. Hajós Gy. (1971). *Bevezetés a geometriába*. Budapest: Tankönyvkiadó.
3. Kosztolányi J., Kovács I., Pintér K., Urbán J. & Vincze I. (2009). *Sokszínű matematika 9*. Szeged: Mozaik Kiadó.
4. Kosztolányi J., Kovács I., Pintér K., Urbán J. & Vincze I. (2014a). *Sokszínű matematika 10*. Szeged: Mozaik Kiadó.
5. Kosztolányi J., Kovács I., Pintér K., Urbán J. & Vincze I. (2014b). *Sokszínű matematika 11*. Szeged: Mozaik Kiadó.
6. Kosztolányi J., Kovács I., Pintér K., Urbán J. & Vincze I. (2014c). *Sokszínű matematika 12*. Szeged: Mozaik Kiadó.
7. Leindler L. (1974). *Analízis I*. Szeged: JATE Bolyai Intézet, jegyzet.
8. Niven, I. & Zuckerman, H. S. (1978). *Bevezetés a számelméletbe*. Budapest: Műszaki Könyvkiadó.
9. Schultz J. & Tarcsay T. (2013). *Matematika 11-12 emelt szint*. Szeged: Maxim Könyvkiadó.
10. Siposs A. (2017): *Emelt szintű érettségi 2017 kidolgozott szóbeli tételek Matematika*. Budapest: Corvina Kiadó Kft.
11. https://hu.wikipedia.org/wiki/Kezd%C5%91lap
12. *és 35 éves tanári tapasztalatom…* ☺

1. számú kiegészítés – A valós számok axiómarendszere (a valós számtest)

A görög matematikában csak az egynél nagyobb pozitív egészeket tekintették *szám*nak (*az EGY mindennek az alapja*), és bár a törtekkel ugyanúgy számoltak, mint mi, azokat nem tekintették számnak, hanem csak két egész *összemérhetőség*éből adódó *arány*nak. *„Mennyiségeket összemérhetőnek mondunk, ha ugyanazon mértékkel mérhetők, összemérhetetlennek pedig, ha nem található hozzájuk közös mérték.”* – határozza meg a két fogalmat Eukleidész az Elemek X. könyvének elején, amely a racionális és irracionális számok elkülönítésének felel meg.

A középiskolai matematikatanításban, a számfogalom történeti fejlődését követve, a természetes számoktól haladunk a valós számok felé.

A permanenciaelvet követve úgy terjesztjük ki a *szám* fogalmát, hogy a természetes számok halmazán bevezetett két művelet (összeadás és szorzás), továbbá ezek megfordításai a kiterjesztett halmazon mindig végrehajthatók legyenek (a művelet eredménye is eleme legyen a halmaznak, azaz a halmaz *zárt* legyen a műveletekre nézve).

Ezt az elvet követve jutunk el a racionális számok halmazáig, amely ilyen tulajdonságú. Ezt követően szeretnénk megfordítani a bevezetett következő műveletet, a négyzetre emelést. A négyzetgyökvonás azonban kivezet a racionális számok halmazából, ezért egészítjük ki azt az irracionális (nem racionális) számok halmazával, hogy aztán a két diszjunkt halmaz unióját valós számoknak nevezzük.

Ezzel a módszerrel azonban alapvetően *logikai* problémák vannak. Tekintsük a racionális és irracionális számok legtöbb tankönyvben szereplő definícióját (*szerencsére a Sokszínű matematika-sorozat nem ilyen*):

D: Azokat a számokat, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként, racionális számoknak nevezzük.

D: Azokat a számokat, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, irracionális számoknak nevezzük.

D: A racionális számokat és az irracionális számokat együtt valós számnak nevezzük.

A probléma lényege a következő: minden definíció valamilyen alaphalmaz azon elemeit határozza meg, amelyek eleget tesznek bizonyos feltételnek. Tekintsük például a szakaszfelező merőleges fogalmának meghatározását!

D: Legyenek adottak az *S* síkban az $A \neq B$ pontok. Az *AB* szakasz szakaszfelező merőlegesének nevezzük a sík azon egyenesét, amely illeszkedik a szakasz felezőpontjára, és merőleges arra.

Tehát $f_{AB} := e \in \{S \text{ egyenesei}\}$, amelyre $F_{AB} \in e \text{ és } e \perp AB$.

A racionális és irracionális számok fenti definíciójából éppen *az alaphalmaz megadása hiányzik*: mik azok a *számok*? Aztán a *számok* fogalmát éppen e két meghatározás segítségével definiálja – tehát egy fogalmat *önmagával* határoz meg, ez logikai hiba.

Ennek következtében előbb a valós számok fogalmát, a valós számok halmazát kell meghatározni, hogy aztán annak részhalmazaiként definiálhassuk a többi nevezetes számhalmazt.

Erre a geometriában látott *axiomatikus felépítés* ad lehetőséget.

A valós számok axiómarendszere

Legyen $\mathbb{R}$ az a halmaz, amelyre teljesülnek a következő axiómák:

I. Testaxiómák

Értelmezve van $\mathbb{R}$–ben két (kétváltozós) művelet a $+:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (összeadás) és a $\cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (szorzás), melyek kielégítik a következőket:

(1) $\forall x;y\in\mathbb{R}$ esetén $x+y=y+x$ (az összeadás kommutatív);
(2) $\forall x;y\in\mathbb{R}$ esetén $x\cdot y=y\cdot x$ (a szorzás kommutatív);
(3) $\forall x;y;z\in\mathbb{R}$ esetén $(x+y)+z=x+(y+z)$ és $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ (az összeadás és a szorzás asszociatív);
(4) $\forall x;y;z\in\mathbb{R}$ esetén $(x+y)\cdot z=(x\cdot z)+(y\cdot z)$ (a szorzás disztributív az összeadásra nézve);
(5) $\exists 0\in\mathbb{R}$, amelyre $\forall x\in\mathbb{R}$ esetén $x+0=0+x=x$ (additív egységelem, zéruselem);
(6) $\exists 1\in\mathbb{R}$, amelyre $\forall x\in\mathbb{R}$ esetén $x\cdot 1=1\cdot x=x$ (multiplikatív egységelem);
(7) $\forall x\in\mathbb{R}$ esetén $\exists(-x)\in\mathbb{R}$, amelyre $x+(-x)=(-x)+x=0$ (additív inverz);
(8) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ esetén $\exists x^{-1}\in\mathbb{R}$, amelyre $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=1$ (multiplikatív inverz).

II. Rendezési axiómák

Értelmezve van az $\mathbb{R}$ testben egy $\le\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ rendezési reláció, azaz egy reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és lineáris reláció, amelyre

(1) $\forall x;y;z\in\mathbb{R}$ és $x\le y$ esetén $x+z\le y+z$ (az összeadás monoton);
(2) $\forall x;y;z\in\mathbb{R}$, $z\ge 0$ és $x\le y$ esetén $x\cdot z\le y\cdot z$ (a szorzás monoton).

III. Teljességi axióma

Az $\mathbb{R}$ rendezett testben minden nem üres, felülről korlátos halmaznak van legkisebb felső korlátja.

Bizonyítható, hogy ilyen $\mathbb{R}$ halmaz létezik, és bizonyos értelemben egyértelműen meghatározott. Az $\mathbb{R}$ halmaz egyik *modell*je a *valós számok halmaza*, egy másik *modell*je a *számegyenes*; a valós számok halmaza és a számegyenes pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létezik.

$\mathbb{R}$ nevezetes részhalmazai

D: Egy $A\subset\mathbb{R}$ halmazt induktívnak nevezünk, ha teljesülnek az alábbiak

(1) $1\in A$;
(2) ha $x\in A$, akkor $x+1\in A$.

T: A valós számok $\mathbb{R}$ halmazában létezik legszűkebb induktív halmaz.

D: A fentiek szerint egyértelműen meghatározott legszűkebb induktív halmazt a természetes számok halmazának hívjuk, és az $\mathbb{N}$ szimbólummal jelöljük, elemeit természetes számoknak mondjuk.

T: A természetes számok $\mathbb{N}$ halmaza teljesíti a Peano-axiómákat, azaz

(1) $1\in\mathbb{N}$;
(2) ha $n\in\mathbb{N}$, akkor $n+1\in\mathbb{N}$;
(3) ha $A\subseteq\mathbb{N}$ olyan halmaz, amely teljesíti az (1) és (2) tulajdonságokat, akkor $A=\mathbb{N}$ (*ez az axióma a teljes indukciós bizonyítások alapja*).

D: Az $x \in \mathbb{R}$ számot egész számnak nevezzük, ha léteznek olyan $n;m \in \mathbb{N}$ számok, melyekre $x = n - m$. Az egész számok halmazára a $\mathbb{Z}$ jelölést használjuk.

D: Az $x \in \mathbb{R}$ számot racionális számnak nevezzük, ha léteznek olyan $p \in \mathbb{Z}$ és $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ számok, hogy $x = \frac{p}{q}$. A racionális számok halmazára a $\mathbb{Q}$ jelölést használjuk.

D: Az irracionális számok halmazán az $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmazt értjük. Az irracionális számok halmazára a $\mathbb{Q}^*$ jelölést használjuk.

A valós számok és a számegyenes, a valós számok tizedes tört alakja

A számegyenes a valós számok grafikai reprezentálására használt grafikai eszköz, *John Wallis*, 17. században élt angol matematikus vezette be.

A számegyenes két kitüntetett pontja az additív (*0*) és a multiplikatív (*1*) egységelem, ezek geometriai és algebrai távolsága az *egység*.

A számegyenes minden pontjához *egyértelmű módon* hozzá tudunk rendelni egy *tizedes tört*et (az egység tízes osztásainak és továbbosztásainak segítségével), amely vagy *véges*, vagy *végtelen szakaszos*, vagy *végtelen nem szakaszos* tizedes tört. (Az egyértelműséget úgy biztosítjuk, hogy a valahonnantól kezdve csupa 9-est tartalmazó számot nem tekintjük tizedes törtnek.)

Mivel mind a valós számok halmaza, mind a számegyenes az $\mathbb{R}$ halmaz egy-egy modellje, ezért a racionális és irracionális számok definícióját az alábbi módon is meg tudjuk adni:

D: Azokat a valós számokat, amelyek tizedes tört alakja véges, vagy végtelen, de szakaszos tizedes tört, racionális számoknak nevezzük.

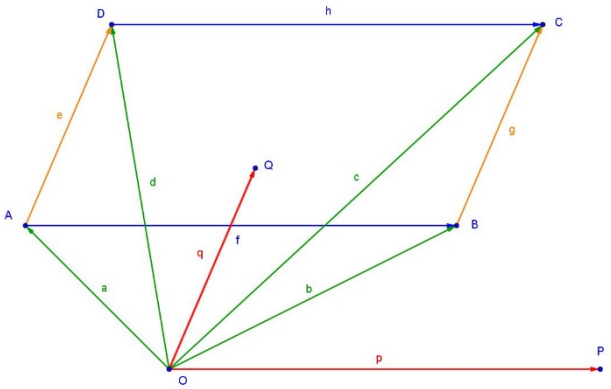
D: Azokat a valós számokat, amelyek tizedes tört alakja végtelen nem szakaszos tizedes tört, irracionális számoknak nevezzük.

2. számú kiegészítés – Vektorok, vektortér, skaláris és vektoriális szorzat

A vektor fogalmának pontos definíciójához gondoljuk végig, amit (geometriai) értelmezésükről eddig mondtunk: *a vektor irányított szakasz*. A következőkben először csak síkbeli vektorokkal foglalkozom, kétfelől is közelítve a kérdéshez.

Irányított szakaszok

Tekintsünk a síkban egy *ABCD* paralelogrammát, és vegyünk föl egy *O* vonatkoztatási pontot!



Az ábrába berajzoltuk a csúcsokba mutató helyvektorokat, és a paralelogramma oldalait irányítottuk, így kaptunk négy *különböző* (*nem egyeznek meg a kezdő- és végpontjaik*!) irányított szakaszt: $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BC}$; és $\overrightarrow{DC}$.

Nyilván
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\mathbf{b}-\mathbf{a}=\mathbf{c}-\mathbf{d}=\mathbf{p}$ és
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\mathbf{d}-\mathbf{a}=\mathbf{c}-\mathbf{b}=\mathbf{q}$, ahol **p** és **q** helyvektorok.

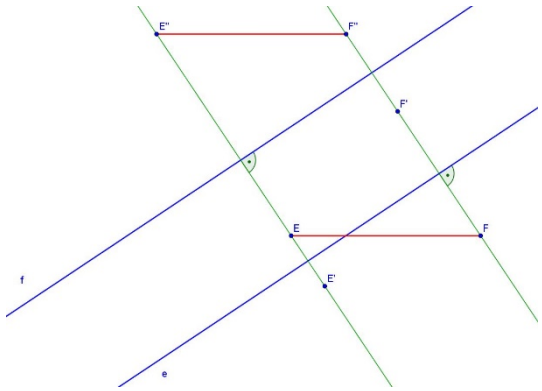
Tehát az ábrán három-három egyenlő vektor található, ezek koordinátái hármasával megegyeznek: azonosak a **p** és **q** helyvektorok végpontjainak koordinátáival. És ez utóbbi megállapítás igaz minden olyan további vektorra is, amely az itt szereplő irányított szakaszokkal egyirányú és egyenlő hosszú – ilyet végtelen sokat találunk. Mi indokolja, hogy megkülönböztessük őket?

A párhuzamos eltolás mint geometriai transzformáció

Legyen *e* és *f* két olyan egyenes, amelyre $e \parallel f$ és $d(e;f)=a$, ahol $a \in \mathbb{R}^+$. Jelöljük $f \circ e$-vel azt a geometriai transzformációt, amelyet az *e*, majd az *f* egyenesre való *tengelyes tükrözés* egymás utáni végrehajtásával kapunk. (*A* $\circ$ *(karika) a geometriai transzformációk halmazán értelmezett kétváltozós művelet, két geometriai transzformáció szorzatának hívjuk. Mivel a geometriai transzformációk is függvények, ezért* $(f \circ e)(P)=f(e(P))$*, összetett függvény, így a geometriai transzformációk szorzatát jobbról balra haladva kell elvégezni.*)

Akkor lássuk a fenti művelet eredményét!

A rajzról jól látható, hogy $f \circ e$, a két tengelyes tükrözés szorzata egy olyan *párhuzamos eltolás*t eredményez, amely az egyenesekre merőleges, iránya *e*-től *f* felé mutat, nagysága pedig a két egyenes távolságának a kétszerese (2*a*). Azaz $\overrightarrow{EE''}=\overrightarrow{FF''}$, két egymással egyenlő irányított szakasz.



Legyenek most *e*; *f*; *g* és *h* a sík olyan egyenesei, amelyekre $e \parallel f \parallel g \parallel h$ (*ebben a sorrendben*) és $d(e;f) = d(g;h) = a$.

Ekkor az $f \circ e$ *és a* $h \circ g$ *különböző geometriai transzformációk ugyanazt a párhuzamos eltolást eredményezik, amelyekhez végtelen sok, egymással egyenlő irányított szakasz tartozik. Miért különböztessük meg ezeket?*

Mielőtt megadnánk a vektor pontos fogalmát, egy fontos új fogalom:

Ekvivalenciareláció

D: A matematikában *ekvivalenciareláció* alatt olyan relációt értünk, amely egyszerre *reflexív*, *szimmetrikus* és *tranzitív* egy halmazon, azaz $\otimes$ ekvivalenciareláció *H*-n, ha bármely $a;b;c \in H$ esetén:

(1) $a \otimes a$;
(2) Ha $a \otimes b$, akkor $b \otimes a$;
(3) Ha $a \otimes b$ és $b \otimes c$, akkor $a \otimes c$.

(*Az eddig megismert relációk közül a* $\cong$ (*egybevágóság*) *és a* $\sim$ (*hasonlóság*) *relációk ekvivalencia–relációk, a* $\leq;\geq;\subseteq$ *relációk nem azok.*)

Ezek után definiáljuk a vektort!

A vektor

Az *S* sík két pontja meghatároz egy szakaszt. Ha egyiket *kezdőpont*nak, a másikat *végpontnak* nevezzünk, akkor ezek meghatároznak egy *irányított szakasz*t. Tehát az irányított szakasz a sík pontjaiból alkotott *rendezett pár*:

$$\overrightarrow{AB} = (A;B) \in S \times S.$$

Két irányított szakaszt ekvivalensnek tekintünk, ha azonos nagyságúak és irányúak, jelölése $\overrightarrow{AB} \simeq \overrightarrow{CD}$.

Az irányított szakaszok halmazán értelmezett $\simeq$ reláció ekvivalenciareláció, mert:

(1) reflexív: $\overrightarrow{AB} \simeq \overrightarrow{AB}$;
(2) szimmetrikus: ha $\overrightarrow{AB} \simeq \overrightarrow{CD}$, akkor $\overrightarrow{CD} \simeq \overrightarrow{AB}$ és
(3) tranzitív: ha $\overrightarrow{AB} \simeq \overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{CD} \simeq \overrightarrow{EF}$, akkor $\overrightarrow{AB} \simeq \overrightarrow{EF}$.

D: Az irányított szakaszok halmazának a $\simeq$ ekvivalenciareláció által definiált osztályait vektoroknak nevezzük. Két (vagy több) azonos hosszúságú és irányú irányított szakasz ugyanannak az osztálynak (vektornak) a képviselője (reprezentánsa).

Amikor a reprezentánsok által képviselt osztályokkal (vektorokkal) műveletet végzünk (például két vektort összeadunk), akkor a szerkesztéshez bármelyiküket használhatjuk, ezért ezeket szabad vektoroknak nevezzük.

Ezzel a definícióval nyilvánvaló az is, hogy a *párhuzamos eltolás*t mint geometriai transzformációt az *S* sík egy ekvivalenciaosztályával (vektorával) adjuk meg, amelyet bármely irányított szakasz reprezentálhat.

Az S síkban egy O vonatkoztatási pontot választva (és bázisvektorokkal felépítve egy koordináta-rendszert) minden szabad vektornak pontosan egy O-ból induló reprezentánsa (helyvektora) van, és minden helyvektor eleme valamely ekvivalenciaosztálynak. A helyvektorok végpontjainak koordinátái és a sík pontjainak koordinátái között így egy kölcsönösen egyértelmű leképezés, megfeleltetés hozható létre.

Emiatt a vektort úgy is lehet tekinteni, mint több számból álló csoportot, amelyet a síkban rendezett számpárnak, a térben rendezett számhármasnak – az n dimenziós térben rendezett szám n-esnek mondunk.

Ezzel egy egészen általános, új fogalomig juthatunk el:

A vektortér

D: Legyen T egy test (például a valós vagy a komplex számok halmaza, bővebben az 1. számú kiegészítésben). Egy V nem üres halmazt *vektortér*nek nevezünk a T test felett, ha

(1) A V halmazon értelmezve van egy *összeadás* nevű művelet (egy $+: V \times V \to V$ függvény), amely $\forall \mathbf{a};\mathbf{b} \in V$ elempárhoz hozzárendel egy és csak egy V-beli elemet ($\mathbf{a}+\mathbf{b}$), továbbá

(2) T és V között értelmezve van egy *skalárral való szorzás* nevű művelet (egy $\cdot: T \times V \to V$ függ–vény), amely $\forall k \in T$ és $\forall \mathbf{b} \in V$ elempárhoz hozzárendel egy és csak egy V-beli elemet ($k\mathbf{a}$)

úgy, hogy az alábbi azonosságok, az ún. *vektortéraxiómák* teljesülnek:

I. V az összeadásra nézve
   (1) kommutatív: $\forall \mathbf{a};\mathbf{b} \in V$ esetén $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$;
   (2) asszociatív: $\forall \mathbf{a};\mathbf{b};\mathbf{c} \in V$ esetén $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$, továbbá
   (3) létezik neutrális elem, $\mathbf{0} \in V$, V nullvektora, amelyre $\forall \mathbf{a} \in V$ esetén $\mathbf{a}+0=\mathbf{a}$, és
   (4) invertálható, azaz $\forall \mathbf{a} \in V$ esetén létezik olyan $-\mathbf{a} \in V$, amelyre $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$, additív inverz.

II. A skalárral való szorzásra
   (1) $\forall k \in T$ és $\forall \mathbf{a};\mathbf{b} \in V$ esetén $k(\mathbf{a}+\mathbf{b})=k\mathbf{a}+k\mathbf{b}$;
   (2) $\forall k,l \in T$ és $\forall \mathbf{a} \in V$ esetén $(k+l)\mathbf{a}=k\mathbf{a}+l\mathbf{a}$;
   (3) $\forall k,l \in T$ és $\forall \mathbf{a} \in V$ esetén $k(l\mathbf{a})=(kl)\mathbf{a}$ és
   (4) $\forall \mathbf{a} \in V$ esetén $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$, ahol 1 a T test egységeleme.

<u>*V elemeit vektoroknak, T elemeit skalároknak nevezzük.*</u>

A vektortér (más néven *lineáris tér*) a *lineáris algebra* egyik legalapvetőbb fogalma. A vektorokkal végezhető műveletek legelemibb tulajdonságait axiomatikusan definiálja, az általunk használt sík és tér általánosítása többdimenziós terekre. Jelentősége nem csupán elméleti, a fizikában, informatikában, a komputergrafikában, továbbá számos más elméleti és alkalmazott tudományágban játszik fontos szerepet – hogy a matematika más ágairól most ne is szóljunk.

A skaláris szorzatról

Ha $T=\mathbb{R}$, és $\mathbf{a}(a_1;a_2;...;a_i;...;a_n) \in V$, ahol $a_i \in \mathbb{R}$, akkor n = 2 esetén a síkbeli, n = 3 esetén a térbeli vektorokat kapjuk.

D: Ha $\mathbf{a}(a_1;a_2;...;a_i;...;a_n);\mathbf{b}(b_1;b_2;...;b_i;...;b_n)\in V$, ahol $a_i;b_i\in\mathbb{R}$, akkor a két vektor skaláris szorzatán a következő összeget értjük: $\mathbf{ab}=a_1b_1+a_2b_2+...+a_ib_i+...+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$.

A vektoriális szorzat

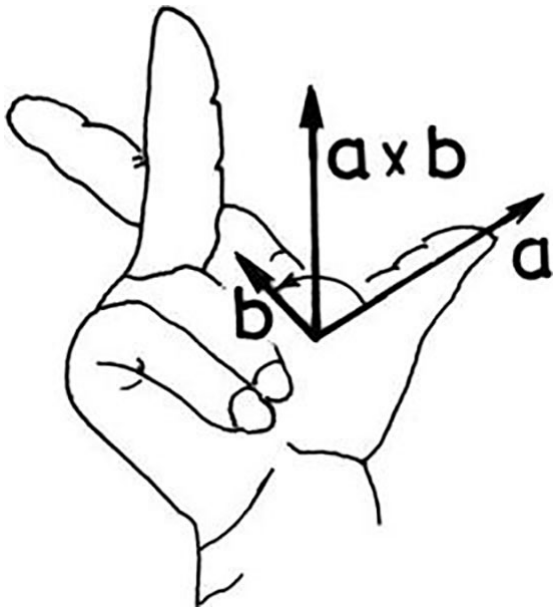
Az euklideszi térben a vektorok között tudunk olyan *szorzási művelet* értelmezni, amely nem vezet ki a vektorok halmazából, azaz *a művelet eredménye is vektor*.

D: Legyen **a** és **b** két vektor a *V* euklideszi térben. Az **a** és **b** vektor vektori szorzatán (jele $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$) azt a **c** vektort értjük, amelyre

(1) $|\mathbf{c}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\sphericalangle(\mathbf{a};\mathbf{b})$ és

(2) **c** merőleges az **a** és **b** vektor síkjára oly módon, hogy **a**; **b** és **c** ebben a sorrendben *jobbsodrású rendszert* alkot.

A vektoriális szorzat irányát az egyik *jobbkéz-szabály*al tudjuk meghatározni.



E műveletnek nagyon sok érdekes tulajdonsága van, többek közt:

- nem kommutatív;
- nem asszociatív, de
- az összeadásra nézve disztributív.

A fizikában nagyon sok ilyen módon számolható mennyiséget ismerünk:

- erő *forgatónyomaték*a: $\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$;
- egy anyagi pont *perdület*e: $\mathbf{N}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$;
- a mágneses Lorentz-erő: $\mathbf{F}=q(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$, illetve $\mathbf{F}=I(\mathbf{l}\times\mathbf{B})$ stb.

MATEMATIKAI KÉPLETTÁR

Hatványok

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \ldots - ab^{2k-1} + b^{2k})$$

$$a^{2k} - b^{2k} = (a+b)(a^{2k-1} - a^{2k-2}b + a^{2k-3}b^2 - \ldots + ab^{2k-2} - b^{2k-1})$$

Binomiális együtthatók

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

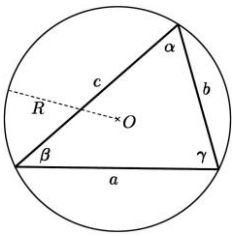
Közepek

Súlyozott számtani közép: $A = \dfrac{g_1 a_1 + g_2 a_2 + \ldots + g_n a_n}{g_1 + g_2 + \ldots + g_n}$

Harmonikus közép: $H = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}$

Négyzetes közép: $Q = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$

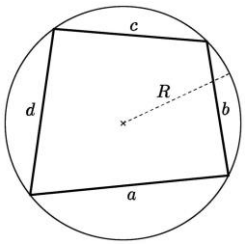
Háromszögek



$K = 2s$

$$T = \frac{abc}{4R} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha}$$

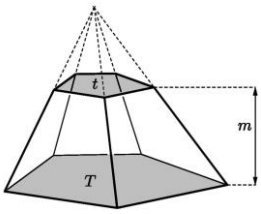
Négyszögek



Húrnégyszög: $T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, ahol $K = 2s$

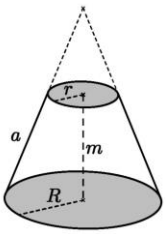
Felszín és térfogat

Csonkagúla: $V = \frac{m}{3}\left(T + \sqrt{Tt} + t\right)$



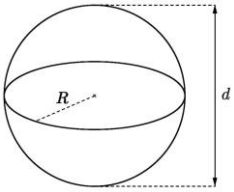
Csonkakúp: $A = \pi\left[R^2 + r^2 + (R+r)a\right]$

$V = \frac{\pi m}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$



Gömb: $A = 4R^2\pi = d^2\pi$

$V = \frac{4R^3\pi}{3} = \frac{d^3\pi}{6}$



Trigonometriai összefüggések

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

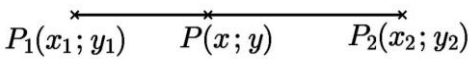
$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

Koordináta-geometria

Szakaszt adott arányban osztó pont koordinátái:

$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}$, $y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}$,

ahol $P_1P : PP_2 = m : n$



Differenciálszámítás

$(c \cdot f)' = c \cdot f'$

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$(f(g))' = f'(g) \cdot g'$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Integrálszámítás

$\int (c \cdot f) = c \cdot \int f$

$\int (f \pm g) = \int f \pm \int g$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

$\int \cos x \, dx = \sin x + C$

$\int_a^b f = -\int_b^a f$

$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

$\int_a^b (c \cdot f) = c \cdot \int_a^b f$

$\int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g$

Statisztika

Szórásnégyzet: $D^2 = \dfrac{\sum x_i^2}{n} - \left(\dfrac{\sum x_i}{n}\right)^2$

Valószínűségszámítás

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(B)}$