1. Lineáris algebra

1.1. Vektoriális szorzat

1. Tétel. *Két térbeli vektor* $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ *és* $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ *vektoriális szorzatát koordináták segítségével az alábbiak szerint számíthatjuk ki:*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

1.2. Vegyesszorzat

2. Tétel. *Három térbeli vektor* $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ *és* $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$ *vegyes szorzatát koordináták segítségével az alábbiak szerint számíthatjuk ki (az utolsó sor szerinti kefejtéssel):*

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3$$

1.3. Gauss-Jordan elimináció lépései

I. Választunk egy nem 0 elemet (célszerű 1-t választani).

II. A kiválasztott elem sorát osztjuk a kiválasztott elemmel.

III. Majd rendre a kiválasztott elem alatt és fölött lévő sorokból kivonjuk a kiválasztott elem sorának megfelelő elemekkel vett szorzatát.

IV. Újabb nem 0 elemet választunk, mely nincs az előbbi választott elem sorában és oszlopában és újra végrehajtjuk a lépéseket.

A Gauss-Jordan elimináció elvégzésével 3×3-as együtthatómátrix esetén az alábbi három esethez juthatunk:

I. A megoldás egyértelmű:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$$

II. Végtelen sok megoldása van a feladatnak:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

III. Nincs megoldása az egyenletrendszernek:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & e \end{array}\right)$$

1.4. Lineáris leképezés (transzformáció) mátrixa

1. Definíció. Legyen az $\mathbf{i}$ egységvektor képe $\varphi(\mathbf{i}) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, továbbá a $\mathbf{j}$ egységvektor képe $\varphi(\mathbf{j}) = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$, akkor a φ **transzformáció mátrixá**nak nevezzük a következő A mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

3. Tétel. *Ebben az esetben egy tetszőleges* $\mathbf{x}$ *pont* $\mathbf{y}$ *képét az A mátrix segítségével a következőképpen kaphatjuk meg.*

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

2. Definíció. Azokat az $\mathbf{x}$ vektorokat, melyekre

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

teljesül, ahol λ valós szám, az $\mathbf{A}$ mátrix **sajátvektor**ainak, a λ számokat a mátrix **sajátérték**einek nevezzük.

2. Komplex számok

2.1. Műveletek komplex számok trigonometrikus alakjával

Trigonometrikus alakban a szorzás és az osztás az alábbiak szerint végezhető el.

4. Tétel. *Legyen* $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *és* $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ *és* $z_2 \neq 0$, *ekkor*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

5. Tétel. *Tetszőleges* 0*-tól különböző* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *komplex számra és bármely* n *egészre*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

6. Tétel. *Minden* 0*-tól különböző* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *komplex számnak pontosan* n *különböző komplex* n*-edik gyöke van és ezek*

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{360^\circ}{n}\cdot k\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{360^\circ}{n}\cdot k\right)\right)$$

alakba írhatók, ahol k *felveszi a* $0,1,2,\ldots,n-1$ *egész értékeket.*

3. Analízis

3.1. Műveletek konvergens sorozatokkal

A konvergens sorozatok határértékére és ∞-hez tartó sorozatokra vonatkozó műveleteket az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot a_n$	$c\cdot a$	$\pm\infty$ (c előjelétől függ)
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n$	$a+b$	∞
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n - b_n$	$a-b$	N („$\infty-\infty$” típus)
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot b_n$	$a\cdot b$	∞
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$	$\frac{a}{b}$, ha $b\neq 0$ divergens, ha $a\neq 0,\ b=0$ N („$\frac{0}{0}$” típus), ha $a=0,\ b=0$	N („$\frac{\infty}{\infty}$” típus)

Az alábbi táblázatban azt foglaltuk össze, ha az egyik sorozat konvergens, a másik pedig tart ∞-hez.

	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot a_n$	$\pm\infty$ (c előjelétől függ)	$c\cdot a$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n$	∞	∞
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n - b_n$	∞	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot b_n$	$\pm\infty$ (b előjelétől függ), ha $b\neq 0$ N („$\infty\cdot 0$” típus), ha $b=0$	$\pm\infty$ (a előjelétől függ), ha $a\neq 0$ N („$\infty\cdot 0$” típus), ha $a=0$
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$	$\pm\infty$ (b előjelétől függ), ha $b\neq 0$ divergens, ha $b=0$	0

3.2. Nevezetes sorozatok határértéke

7. Tétel. *I.*

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty,$$

II.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

III.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & ha\ \ |q|<1 \\ 1 & ha\ \ q=1 \\ \infty & ha\ \ q>1 \\ divergens & ha\ \ q\leq -1, \end{cases}$$

IV.

$$\lim_{n\to} \sqrt[a]{n} = \infty,\ \ a\in\mathbb{R}^+,$$

V.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a \in \mathbb{R}^+,$$

VI.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

VII.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a,\ a \in \mathbb{R}.$$

4. Differenciálszámítás

4.1. Elemi függvények deriváltjai

f	f'
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$

f	f'
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ahol $\lvert x\rvert < 1$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ahol $\lvert x\rvert < 1$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \operatorname{arcctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

4.2. Differenciálási szabályok

8. Tétel. *Ha az f és g függvény differenciálható az x_0 pontban és $c \in \mathbb{R}$, akkor az alábbi függvényeknek is létezik az adott pontban a deriváltjuk:*

I. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

II. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

III. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

IV. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \quad g(x_0) \neq 0$

Ha a g függvény differenciálható az x_0 pontban és az f függvény differenciálható a $g(x_0)$ pontban akkor az $f \circ g$ függvény is differenciálható az x_0 pontban:

$$(f(g(x_0)))' = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

4.3. L'Hospital szabály

9. Tétel. *Legyen f és g függvény értelmezve az a pont környezetében és esetleg a-ban is. Tegyük fel, hogy f és g is differenciálható ugyanitt, valamint, hogy*

I. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *és* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ *vagy*

II. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *és* $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$

Ha a $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *határérték létezik, akkor igaz, hogy* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

4.4. Síkgörbe érintője

3. Definíció. Az $y=f(x)$ egyenletű görbe meredeksége a $P(x_0, f(x_0))$ pontban: $m=f'(x_0)$ (amennyiben létezik a derivált). A görbe P-beli érintője a P-n átmenő, m meredekségű egyenes.

Ekkor az érintő egyenlete:

$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

4.5. $y = f(x)$ felrajzolásának stratégiája

I. Határozzuk meg f értelmezési tartományát. Ha az értelmezési tartomány több részintervallumból áll határozzuk meg ezek végpontjait(határpontjait) is.

II. Keressük meg f' -t.

III. Keressük meg a függvény kritikus pontjait. A kritikus pontok és a határpontok segítségével osszuk fel a számegyenest tartományokra.

IV. Állapítsuk meg, mely tartományokban növekvő, illetve csökkenő a függvény és ez alapján a kritikus pontokban adjuk meg a szélsőérték típusát.

V. Számítsuk ki f''-t, majd keressük meg azokat a pontokat, ahol $f''=0$ vagy f'' nem létezik. Ezek lehetnek az inflexiós pontok.

VI. Ezen pontok és az értelmezési tartomány határpontjainak segítségével osszuk fel a számegyenest tartományokra.

VII. Állapítsuk meg, mely tartományokban konvex, illetve konkáv a függvény és a fenti pontok közül melyekben van inflexiós pont.

VIII. Határozzuk meg a függvény határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban.

IX. Vegyük fel a görbe fontos pontjait, azaz a tengelyekkel való metszéspontjait, a szélsőérték-, inflexiópontokat, azután pedig rajzoljuk meg a görbét.