ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2007. május 8.

MATEMATIKA SPANYOL NYELVEN
MATEMÁTICAS

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA
EXAMEN ESCRITO DE BACHILLERATO DE NIVEL SUPERIOR

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ
GUÍA DE CORRECCIÓN Y EVALUACIÓN

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM
MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CULTURA

Información importante

Cuestiones formales para la corrección del examen:

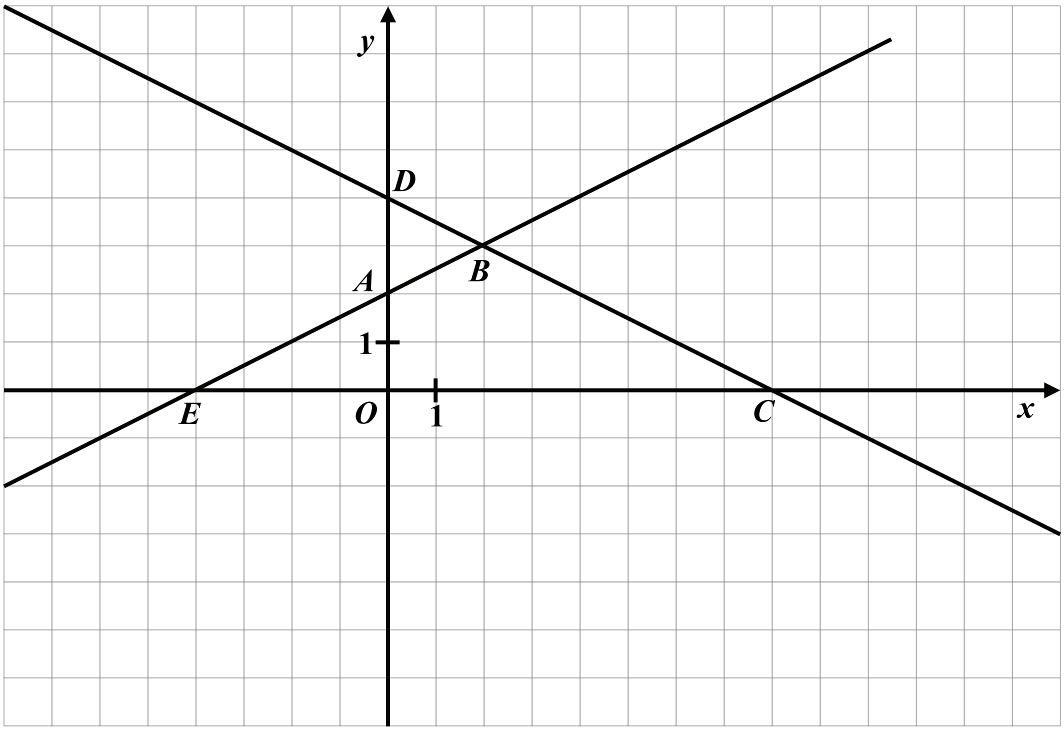
1. El profesor tiene que corregir el examen con un **bolígrafo de diferente color** al utilizado por el alumno. El profesor indicará los errores, los pasos que faltan, etc, tal y como esté acostumbrado.
2. En los recuadros grises de puntuación, el primero indica la máxima puntuación que se puede dar y el **recuadro** de al lado recoge los **puntos** que ha dado el profesor.
3. **Si no hay errores en la resolución,** es suficiente escribir los puntos máximos en el recuadro correspondiente.
4. Si hay errores o faltan pasos, indique, por favor, **los puntos correspondientes a cada parte**.

Cuestiones de contenido:

1. En algunos ejercicios, les hemos ofrecido la puntuación correspondiente a varias resoluciones. Si usted encuentra **otra resolución,** busque, por favor, las partes equivalentes de las resoluciones que propone la guía y reparta los puntos según dichas partes.
2. **Se pueden dividir** los puntos que la guía recomienda para indicar distintos pasos de una parte. Pero, en cualquier caso, los puntos que se den siempre serán enteros.
3. Si el desarrollo de la resolución y los resultados finales son correctos, se puede dar la puntuación máxima incluso si **las explicaciones no son tan amplias** como las que aparecen en la guía.
4. Si en una parte de la resolución, el estudiante comete **un error de cálculo** o de precisión, no recibirá los puntos correspondientes a esta parte. Si al arrastrar este error, el resto de los pasos realizados son correctos y no cambia el sentido del problema, entonces se puntuarán el resto de los pasos.
5. En caso de **un error de aplicación teórica**, dentro de un razonamiento en la resolución (los razonamientos distintos aparecen separados con una línea doble en la guía), no se pueden dar puntos ni siquiera por los pasos matemáticamente correctos hechos tras cometer el error. Pero si en el siguiente razonamiento, se sigue trabajando bien, a pesar del resultado incorrecto causado por dicho error, se darán los puntos máximos para las siguientes partes de la resolución del problema, si no ha cambiado el sentido del mismo.
6. Si en la guía, **algún comentario** o **una unidad de medida** está entre paréntesis, la solución será correcta aunque no se escriba.
7. Si se escriben varios procedimientos para resolver un ejercicio, **sólo se puntuará uno de ellos, el que el alumno examinado haya indicado como válido**.
8. **No se pueden dar puntos extra** que excedan los puntos máximos que se pueden dar para el ejercicio o una parte de él.
9. **No se restan puntos** si aparecen errores en algún paso o en partes de la resolución que el alumno no utiliza después para resolver el ejercicio.
10. **De los cinco ejercicios propuestos en la parte II. del examen sólo se pueden puntuar cuatro.** Probablemente el estudiante habrá indicado el número del ejercicio eliminado, el que no se puntuará, en el cuadrado correspondiente. Si el alumno hubiera resuelto este ejercicio no habría que corregirlo. Si no queda claro cuál es el ejercicio que el alumno examinado no desea que se le corrija, entonces automáticamente, según el orden en que aparecen los ejercicios, no se corregirá el último.

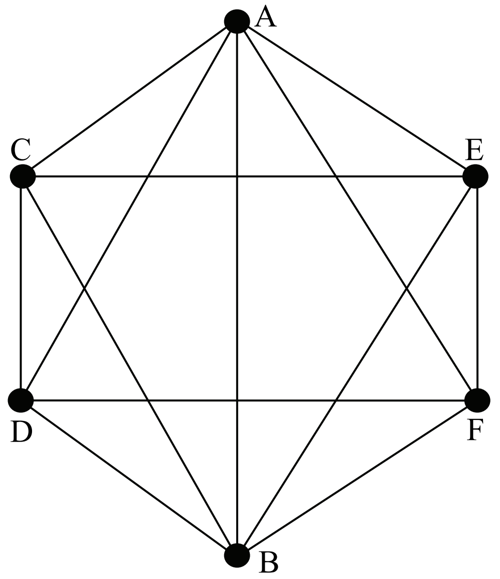
I.

1.		
Utilizando las propiedades de los logaritmos, transformamos la primera ecuación en: $\log_2 \frac{2x+y}{x-1{,}5y} = \log_2 4$.	2 puntos	
Por ser la función logarítmica estrictamente monótona	1 punto	
$\frac{2x+y}{x-1{,}5y} = 4$, de aquí, tras la agrupación y ordenación de los términos, llegamos a: $7y = 2x$, o escrito de otra forma $x = 3{,}5y$.	1 punto	
Aplicando las propiedades de los logaritmos, de la segunda ecuación se llega a: $\log_3 (x-y)(x+y) =$ $\log_3 45$.	2 puntos	
Por la propiedad de „la suma por diferencia” y por la estricta monotonía de la función logarítmica se deduce que: $x^2 - y^2 = 45$.	1 punto	
Sustituyendo el valor de $x = 3{,}5y$ en la ecuación anterior y agrupando, llegamos a: $y^2 = 4$,	1 punto	
de donde $y = 2$ ó $y = -2$.	1 punto	*Si el alumno sólo da la solución $y = 2$, entonces no recibirá este punto.*
El resultado negativo para la y hace que la x también lo sea y este par de valores no satisface el sistema de ecuaciones original.	1 punto	
El par de soluciones para el sistema de ecuaciones es $x = 7$ e $y = 2$. Este par verifica las dos ecuaciones originales.	1 punto	
Total:	**11 puntos**	

2. a)		
		
Por la representación correcta.	2 puntos	
Total:	**2 puntos**	
b)		
Los vértices del cuadrilátero convexo son *A,B,C,O*, siendo *B* el punto de corte de las dos rectas: *B*(2; 3).	1 punto	
Para el cálculo del área del cuadrilátero podemos hacer, por ejemplo, que del área del triángulo *DOC* restemos el área del triángulo *ABD*. Área del triángulo rectángulo *DOC*: $\frac{OC \cdot OD}{2} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$.	2 puntos	
En el triángulo *ABD* el lado *AD* = 2, la longitud de la altura desde el vértice *B* coincide con la primera coordenada del punto *B* : 2, por lo que el área del triándulo *ABD* es 2.	2 puntos	
Así el área del cuadrilátero convexo *ABCO* es 16 − 2 = 14 (unidades al cuadrado).	1 punto	
Total:	**6 puntos**	

c)		
Los vértices del cuadrilátero cóncavo: *E, C, D, A*. La longitud de sus lados: $EC = 12$; $CD = \sqrt{80}$; $DA = 2$; $AE = \sqrt{20}$; $ED = 4\sqrt{2}$; $CA = \sqrt{68}$.	4 puntos	*El cálculo de cada una de las longitudes de sus lados vale 1 punto.*
su perímetro: $k_1 = EC + CD + DA + AE =$ $= 12 + \sqrt{80} + 2 + \sqrt{20} = 14 + 6\sqrt{5}$ ($\approx$ 27,42); $k_2 = ED + DC + AC + AE = 4\sqrt{2} + 6\sqrt{5} + 2\sqrt{17}$ ($\approx$ 27,32); $k_3 = ED + AD + AC + EC = 14 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{17}$ ($\approx$ 27,91).	1 punto	
Total:	**5 puntos**	*Se pueden dar los 5 puntos si el alumno ha calculado bien el perímetro de, por lo menos, uno de entre los tres cuadriláteros cóncavos posibles.*

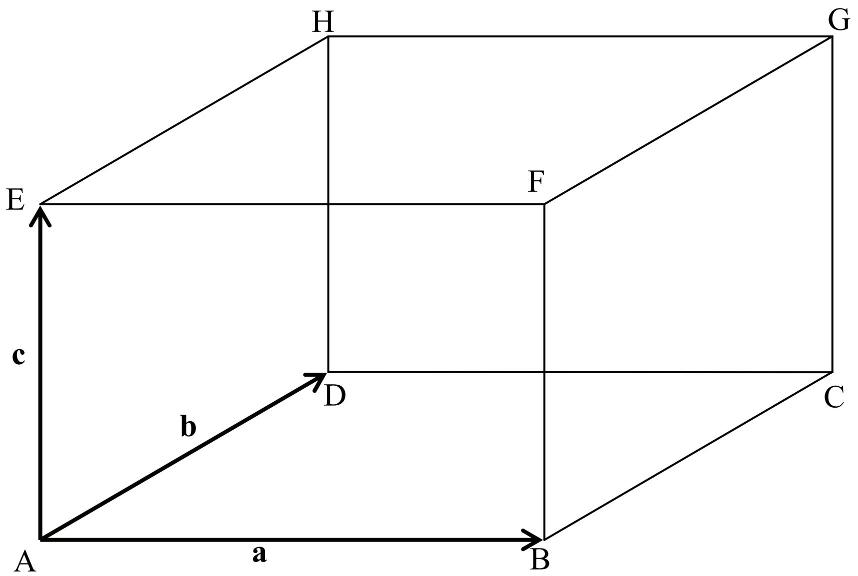
3. a)



Para que la representación sea correcta deben aparecer indicados los 6 vértices,	1 punto	
entre los cuales hay dos que tienen grado cinco (A y B)	1 punto	
y hay cuatro vértices de grado cuatro (C, D, E, F).	2 puntos	
Total:	**4 puntos**	*Del grafo completo de seis vértices faltan dos aristas. Estas dos aristas no son un subgrafo conexo en el grafo complementario.*
b)		
Si sumamos los grados de los vértices del grafo obtenemos el doble de los apretones de mano que se dieron los científicos.	1 punto	
Suma de los grados de los vértices del grafo: 26.	1 punto	
Así los compañeros de viaje se saludaron mutuamente con 13 apretones de mano.	1 punto	
Total:	**3 puntos**	*También se pueden dar estos tres puntos si en el grafo representado correctamente se cuentan el número de aristas.*

c) I. método		
Elegimos, en primer lugar, por ejemplo, el compañero de habitación del científico llamado A. Para esto tenemos cinco maneras distintas de hacerlo.	1 punto	
Si ya está elegido el compañero de habitación de A, de los cuatro científicos restantes elegimos uno, por ejemplo, C, y para él podemos elegir un compañero de habitación de tres formas distintas.	2 puntos	
Si dos habitaciones ya están completas, la habitación que falta sólo se puede completar de una manera con los dos científicos todavía no elegidos.	1 punto	
No hacemos distinción entre las habitaciones, por tanto, el número total de posibilidades para hacer la distribución de las habitaciones es $5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$.	2 puntos	
Total:	**6 puntos**	*Si el alumno enumera todas las posibilidades y cuenta 15, entonces podrá recibir los 6 puntos. Si realiza la enumeración pero resulta incompleta, como máximo recibirá 4 puntos.*

c) II. método		
Dos científicos se pueden elegir de $\binom{6}{2}$ maneras distintas.	2 puntos	
De los cuatro científicos restantes se pueden elegir otros dos de $\binom{4}{2}$ maneras distintas.	1 punto	
Así habrá $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}$ maneras distintas de elegir tres grupos formados, cada uno de ellos, por dos personas.	1 punto	
Los tres grupos se pueden ordenar en las habitaciones de 3! formas distintas, por eso habrá $\frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}}{3!} = 15$ maneras posibles de hacer la distribución de las habitaciones.	2 puntos	
Total:	**6 puntos**	

4. a)		
		
Suma de los siete vectores: $\overrightarrow{AP} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) + \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH}\right) + \overrightarrow{AG}$. En la parte de la derecha de la igualdad expresamos los vectores que aparecen utilizando los vectores formados por las aristas **a**, **b** y **c**: $\overrightarrow{AP} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{a} + \mathbf{c}) + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) + (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$.	1 punto	*Se puede dar un punto por cualquier expresión correcta del vector* $\overrightarrow{AP}$
Aplicando las propiedades de los vectores obtenemos que : $\overrightarrow{AP} = 4(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$.	1punto	
Total:	**2 puntos**	
b)		
Ya que $\overrightarrow{AP} = 4\,\overrightarrow{AG}$, el módulo del vector $\overrightarrow{AP}$ será el cuádruple de la longitud de la diagonal del cuerpo AG.	1 punto	
Por el teorema de Pitágoras: $AG^2 = AB^2 + BC^2 + CG^2 = 10^2 + 8^2 + 6^2 = 200$, $AG = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.	1 punto	
$AP = 4AG = 40\sqrt{2}$ ($\approx 56{,}57$).	1 punto	
Total:	**3 puntos**	

c)		
Como $\overrightarrow{AP} = 4\ \overrightarrow{AG}$, el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AE}$ coincide con el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AG}$ y $\overrightarrow{AE}$. Este ángulo es el ángulo cuyo vértice es el vértice A del triángulo rectángulo AEG, que nombramos con la letra α.	1 punto	
Utilizando que $AE = 6$ y $AG = 10\sqrt{2}$, tenemos que $\cos \alpha = \dfrac{AE}{AG} = \dfrac{6}{10\sqrt{2}} \approx 0{,}4243$,	1 punto	
de aquí $\alpha \approx 64{,}9°$.	1 punto	
Total:	**3 puntos**	
d)		
El vector de posición con extremo en el baricentro S del triángulo HFC ($\overrightarrow{AS}$) es la tercera parte de la suma de los vectores de posición cuyos extremos son los vértices del triángulo.	2 puntos	
$\overrightarrow{AS} = \dfrac{\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AC}}{3} = \dfrac{(\mathbf{b}+\mathbf{c})+(\mathbf{a}+\mathbf{c})+(\mathbf{a}+\mathbf{b})}{3} = \dfrac{2}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$,	1 punto	
es decir, $\overrightarrow{AS} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AG}$.	1 punto	
$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AP} = (\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AG})\cdot(4\ \overrightarrow{AG}) = \dfrac{8}{3}AG^2 = \dfrac{8}{3}\cdot 200 = \dfrac{1600}{3}\ (\approx 533{,}3)$.	2 puntos	
Total:	**6 puntos**	

II.

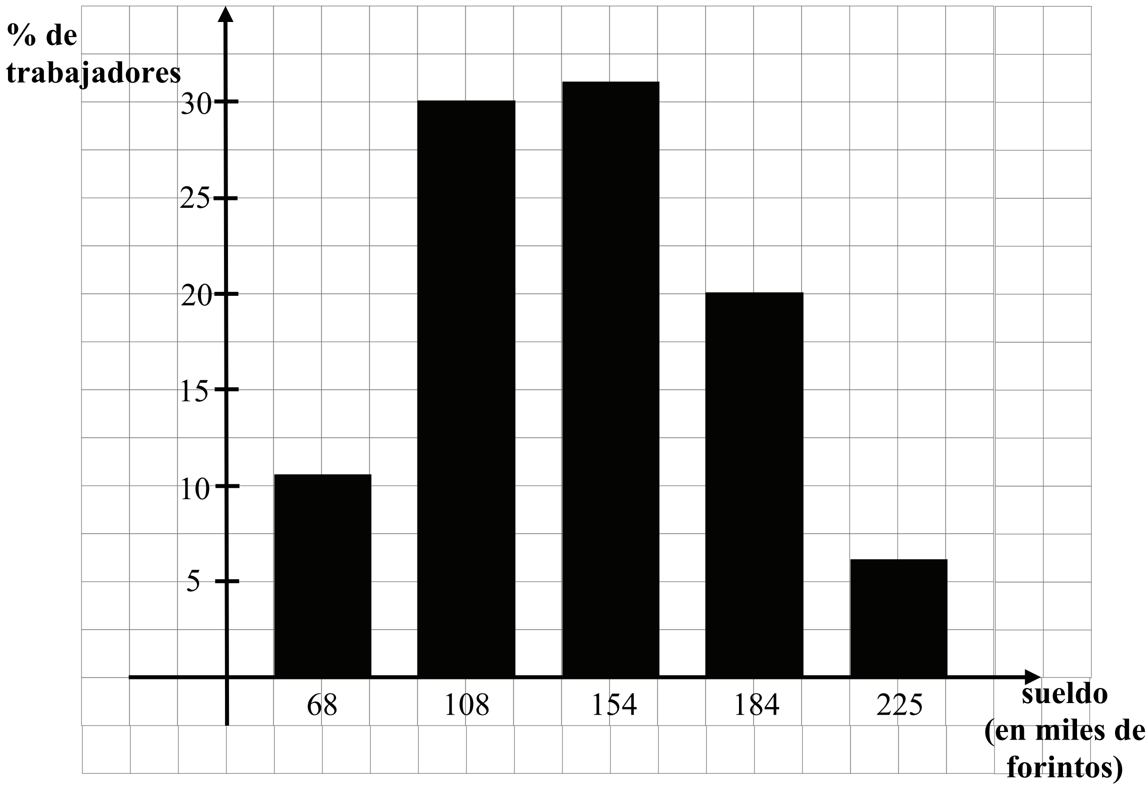
5.		
Descomponemos los denominadores en factores $\frac{x}{(x-2)(x+2)} + \frac{p}{x(x+2)} + \frac{1}{x(2-x)} = 0$	2 puntos	
Debido a que los denominadores no pueden valer 0, entoces x no puede ser: −2; 0; 2.	1 punto	
Multiplicando ambos lados de la ecuación por el denominador común $(x-2)x(x+2)$, y después de ordenar x obtenemos la siguiente ecuación: $x^2+(p-1)x-2(p+1)=0$.	1 punto	
De la fórmula de resolución viene que $x_{1,2}=\frac{1-p\pm\sqrt{p^2+6p+9}}{2}$,	1 punto	
o lo que es igual $x_{1;2}=\frac{1-p\pm\lvert p+3\rvert}{2}$.	1 punto	*Este punto se consigue por la apreciación del „cuadrado de la suma” que está bajo la raíz cuadrada.*
$x_1=2$, y $x_2=-(p+1)$.	2 puntos	
La ecuación no puede tener dos soluciones distintas ya que $x_1=2$ no es solución de la ecuación original, no forma parte de su dominio. Por tanto, la solución podría ser $x_2=-(p+1)$.	2 puntos	
No habrá soluciones si x_2 toma alguno de los valores: −2; 0; 2 .	2 puntos	
$x_2=-2$, si $p=1$; $x_2=0$, si $p=-1$; $x_2=2$, si $p=-3$.	3 puntos	
Luego si el parámetro p toma los valores: −3; −1 ó 1, la ecuación original no tendrá soluciones reales.	1 punto	
Total:	**16 puntos**	

<table>
<tr><td colspan="3">6. a)</td></tr>
<tr><td>Debido a la relación existente entre los tres términos consecutivos de una progresión geométrica:
$p^2 = 4c$.</td><td>1 punto</td><td rowspan="6">Si entiende bien la definición de las progresiones aritmética y geométrica, escribe correctamente las relaciones, pero no sigue con los cálculos (porque, por ejemplo, trabaja con muchos datos desconocidos), entonces sólo se darán 2 puntos.</td></tr>
<tr><td>Por la relación existente entre los tres términos consecutivos de una progresión aritmética:
$2c = p + 40$.</td><td>1 punto</td></tr>
<tr><td>Sustituimos el valor de 2c de la segunda ecuación en la primera y tras realizar las operaciones y ordenar llegamos a:
$p^2 - 2p - 80 = 0$,</td><td>1 punto</td></tr>
<tr><td>de donde $p_1 = 10$ y $p_2 = -8$.</td><td>1 punto</td></tr>
<tr><td>Como la solución negativa no puede ser solución del problema, Dani contó 10 peces grandes rojos y 25 peces pequeños a rayas.</td><td>1 punto</td></tr>
<tr><td align="right">Total:</td><td>5 puntos</td></tr>
<tr><td colspan="3">b)</td></tr>
<tr><td>El crecimiento de los peces es del 20 % mensual por eso, debido al crecimiento, cada mes el número de peces aumenta 1,2 veces.</td><td>1 punto</td><td></td></tr>
<tr><td>Si Dani vende el x% de los peces cada dos meses, entonces tras la venta la cantidad de peces se modificará $\left(1 - \frac{x}{100}\right) = q$ veces, cada dos meses.</td><td>1 punto</td><td></td></tr>
<tr><td>Así, cada dos meses, la cantidad siempre se modificará $1{,}2^2 \cdot q = 1{,}44 \cdot q$ veces.</td><td>1 punto</td><td></td></tr>
<tr><td>De esto podemos escribir la ecuación
$100 \cdot (1{,}44q)^{12} = 252$.</td><td>1 punto</td><td></td></tr>
<tr><td>Tras los cálculos y ordenación se llega a que $q = 0{,}75$</td><td>2 puntos</td><td></td></tr>
<tr><td>La cantidad de peces que le quedaban a Dani cada dos meses es del 75 %, o de otra manera, Dani vendía la cantidad del 25 %, cada dos meses.</td><td>1 punto</td><td></td></tr>
<tr><td align="right">Total:</td><td>7 puntos</td><td></td></tr>
</table>

c)		
El número de los casos posibles es: $\binom{20}{8}$.	1 punto	*También aceptaremos los valores correctos de los números combinatorios aunque el alumno no muestre el modo de calcularlos (puede obtenerlos de la calculadora y del libro fórmulas). Si no obtiene el valor numérico de la probabilidad o comete un error, en lugar de los últimos 2 puntos se le dará 1 punto.*
El número de casos favorables es: $\binom{5}{3}\cdot\binom{15}{5}$.	1 punto	
Probabilidad buscada: $\dfrac{\binom{5}{3}\cdot\binom{15}{5}}{\binom{20}{8}}=\dfrac{10\cdot 3003}{125970}=0{,}2384$.	2 puntos	
Total:	**4 puntos**	

7. a)

sueldo (en miles de forintos)	68	108	154	184	225
número de trabajadores	25	65	70	44	16
%de trabajadores	**11**	**30**	**32**	**20**	**7**



Realización de un diagrama de barras correcto (por la asignación de las variables correspondientes a los ejes 2 puntos, uno por cada eje, por la construcción de la barras 1 punto).

<u>*Observaciones:*</u>
El alumno puede tomar como altura de las barras el (número de trabajadores) o (el % de trabajadores). El 5 % equivale a 11 personas. Para conseguir los 3 puntos no es obligatorio rellenar la tercera fila de la tabla.

Total:	**3 puntos**	

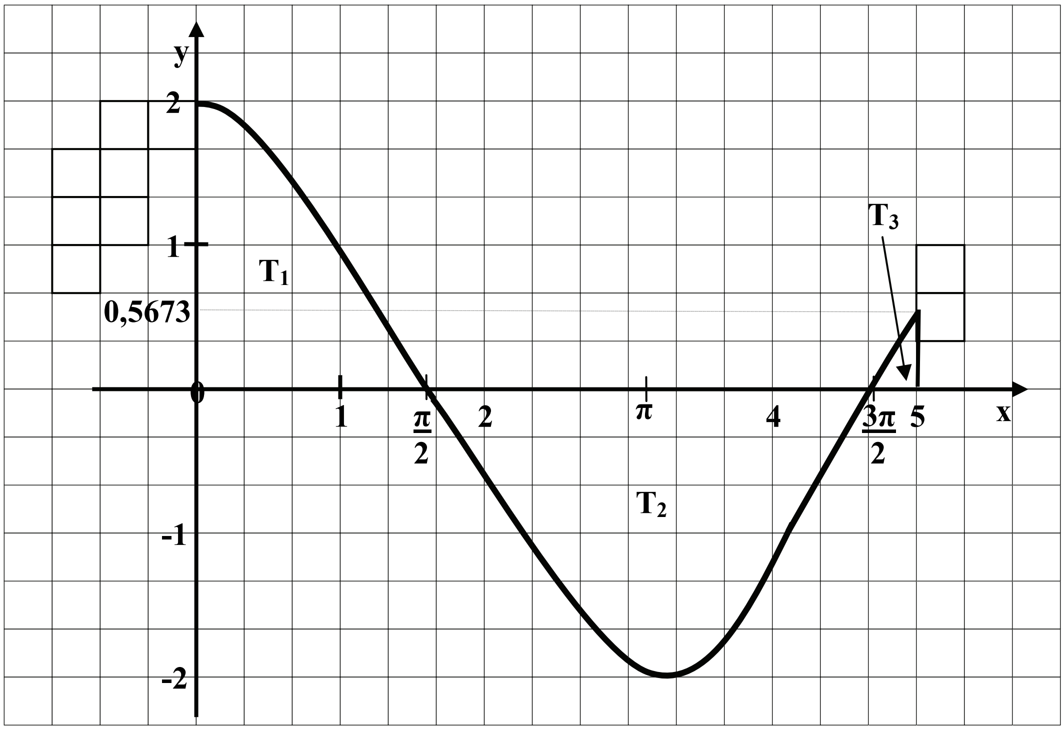
b)		
La media de los sueldos brutos del mes de agosto: $\frac{25\cdot 68+65\cdot 108+70\cdot 154+44\cdot 184+16\cdot 225}{220}=\frac{31196}{220}=$ $= 141{,}8$ miles de Ft.	3 puntos	*También se reciben los 3 puntos si el resultado de la media es correcto aunque el alumno no muestre los cálculos realizados, porque ha podido introducir los datos en la calculadora y obtener así el resultado.*
La desviación típica de los sueldos del mes de agosto: 43,17 miles de Ft.	3 puntos	*Si el alumno calcula la desviación típica de cualquiera de las maneras posibles y es correcta, recibe los 3 puntos. Puede hacer el cálculo aplicando su definición; aplicando algún teorema conocido (la media de los cuadrados menos el cuadrado de la media); también puede recibir el resultado correcto con la calculadora. Si en lugar de la desviación típica calcula la varianza, en lugar de 3 puntos podrá conseguir, como máximo 2 puntos.*
Total:	**6 puntos**	*Por un valor incorrecto de la media y/o de la desviación típica no recibirá puntos, si no se puede observar en el examen que el alumno haya utilizado concretamente*

		alguna de las partes mencionadas.

<table>
<tr><td colspan="3">c)</td></tr>
<tr><td>Si calculamos el sueldo neto de cada uno de ellos, éste corresponde al 60,6 % de los sueldos brutos.</td><td>1 punto</td><td rowspan="13">Tanto en los apartados c) como en d), daremos la puntuación máxima por los resultados preguntados a aquellos alumnos que aludiendo a teoremas generales para los valores medios y desviación típica respectivos, responden correctamente a las preguntas. Si el alumno tras los valores calculados de la media y/o de la desviación típica, no escribe las unidades (por ejemplo: „miles de Ft”), entoces de todos los puntos que pueda recibir para el ejercicio sólo se restará 1 punto una vez.</td></tr>
<tr><td>El sueldo de cada uno de los 220 trabajadores se modificará 0,606 veces, por tanto la media también será 0,606 veces la anterior, o de otra forma, la media de los sueldos netos será $0{,}606 \cdot 141{,}8 \approx 85{,}93$ miles de Ft.</td><td>2 punto</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observación: Aceptamos también como respuesta correcta 85,94 miles de Ft.</td></tr>
<tr><td align="right">Total:</td><td>3 puntos</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">d)</td></tr>
<tr><td>Si el sueldo bruto de cada uno de los 220 trabajadores aumenta 2500Ft, entonces la media de los sueldos aumenta lo mismo.</td><td>1 punto</td></tr>
<tr><td>Como se puede observar, para cada uno de los 220 datos no cambia la desviación del nuevo dato con respecto a la nueva media, ya que ambas cantidades crecen lo mismo y su diferencia no varía.</td><td>1 punto</td></tr>
<tr><td>Por eso no hay cambio en los cuadrados de las diferencias y tampoco en su media: permanece el valor de agosto.</td><td>1 punto</td></tr>
<tr><td>Luego la desviación típica de los sueldos brutos no cambia.</td><td>1 punto</td></tr>
<tr><td align="right">Total:</td><td>4 puntos</td></tr>
</table>

8. a)		
Debido a que la función cos x es par $f(x) = 2\cos x$	2 puntos	
La función f es acotada,	1 punto	
ya que $-2 \le f(x) \le 2$	1 punto	
No es cierto que los puntos donde la función f alcance el mínimo y el valor máximo de la función sean números irracionales,	1 punto	
porque el valor máximo de la función f es 2 que no es un número irracional.	1 punto	
Total:	**6 puntos**	

b)



Por una representación correcta de la gráfica que muestre las unidades y los extremos de los intervalos.	2 puntos	

El área de la región del plano se divide en tres partes que aparecen indicadas con T_1, T_2, T_3. Como la función *f* es continua, se pueden calcular las áreas preguntadas a partir de la integral: $T_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x dx = 2\,[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$.	2 puntos	*El alumno puede obtener los valores de T_1 y T_2 directamente si hace referencia a algo conocido, que la gráfica de 2cos x (o de 2sin x) y el intervalo $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ en el eje x delimitan el área de la región del plano que vale 2. Por la indicación del tamaño de las áreas se recibe 2 puntos, 1 punto por cada una, por las relaciones adecuadas recibe 2 puntos, 1 punto por cada una.*
En el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$ los valores de la función *f* no son positivos y por tanto: $T_2=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2\left\lvert\cos x\right\rvert dx = 2\,[-\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 4$.	2 puntos	
$T_3=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{5} 2\cos x dx = 2\,[\sin x]_{\frac{3\pi}{2}}^{5} = 2\sin 5 + 2$.	2 puntos	
Área de la región del plano: $T = T_1 + T_2 + T_3 =$ $= 2+4+2\sin 5+2 = 8+2\sin 5 \approx 6{,}082$.	2 puntos	
Total:	**10 puntos**	

9.		
En primer lugar enumeraremos, en orden, los elementos de los cuatro conjuntos de números de dos cifras que satisfacen una de las afirmaciones. Denotaremos con *A; B; C* y *D* a los conjuntos. Para los N divisibles por 7 tomaremos los múltiplos de siete: $A = \{ 14; 21; 28; 35; 42; 49; 56; 63; 70; 77; 84; 91; 98 \}$	1 punto	
N múltiplos de 29: $B = \{ 29; 58; 87 \}$	1 punto	
$N + 11$ será el cuadrado de un número si $N = n^2 - 11$, de donde se deduce que $22 < n^2 < 111$. $C = \{ 14; 25; 38; 53; 70; 89 \}$	1 punto	
$N - 13$ será el cuadrado de un número si $N = k^2 + 13$, de donde $0 \le k^2 < 87$. $D = \{ 13; 14; 17; 22; 29; 38; 49; 62; 77; 94 \}$	1 punto	
Los elementos que satisfacen exactamente las condiciones del ejercicio son aquellos que pertenecen a la intersección de dos de los cuatro conjuntos determinados anteriormente, pero que no son elementos de ninguno de los otros dos conjuntos.	1 punto	
De entre los cuatro conjuntos podemos elegir dos de seis maneras distintas. Estudiemos estos seis conjuntos.	1 punto	*También se pueden dar los dos puntos correspondientes a este razonamiento si el alumno no escribe las explicaciones con palabras, pero se puede deducir de la propia resolución que ha pensado de esta manera.*
Los conjuntos $A \cap B$ y $B \cap C$ son en ambos casos conjuntos vacíos.	1 punto	
$A \cap C = \{ 14; 70 \}$,	1 punto	
De entre estos elementos, 14 no puede ser solución ya que es un elemento del conjunto D ; 70 lo es porque no es elemento ni de B ni de D .	1 punto	
$A \cap D = \{ 14; 49; 77 \}$	1 punto	
de entre estos elementos (14 no es solución ya que pertenece a *C*); 49 y 77 sí son soluciones porque ninguno de los dos son elementos ni de *C*, ni de *B*.	1 punto	

$B \cap D = \{\,29\,\}$,	1 punto	
29 es solución ya que no está ni en A, ni en C.	1 punto	
$C \cap D = \{\,14; 38\,\}$,	1 punto	
de entre estos elementos (14 no es solución ya que pertenece a A); 38 sí lo es ya que no está ni en A ni en B.	1 punto	
Por lo tanto los cinco números siguientes que satisfacen las condiciones del problema: 29; 38; 49; 70; 77.	1 punto	
Total:	**16 puntos**	

<u>Observaciones:</u>
Si el alumno escribe números que son soluciones pero no especifica porqué lo son (qué dos afirmaciones satisfacen estos números y qué dos son falsas), entonces por la enumeración de 1 ó 2 soluciones correctas se obtendrá 1 punto, por 3 soluciones correctas 2 puntos, por 4 soluciones correctas 3 puntos y por las 5 soluciones correctas 4 puntos.
Si el alumno además de la enumeración de las soluciones especifica que se satisfacen las condiciones del ejercicio, pero sin demostrar que haya o no más números que puedan cumplir estas condiciones, entonces podrá conseguir como máximo 8 puntos por la resolución, (que son el doble de los que pueden conseguirse según el párrafo anterior.)