ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2008. május 6.

MATEMATIKA
SZERB NYELVEN

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI
ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI
ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS
MINISZTÉRIUM

Важне информације

Формални захтеви:

1. Задатак треба исправити **хемијском оловком другачије боје** од оне коју користи кандидат, а грешке, недостатке итд. обележити одговарајући наставничкој пракси.
2. Међу сивим правоугаоницима који су поред задатака у првом је максималан број бодова за тај задатак, а **у други наставник уписује постигнут број бодова** за тај задатак.
3. У случају **потпуно исправног решења (без грешке)** у одговарајући правоугаоник је довољно уписати максималан број бодова.
4. У случају решења са недостатком/грешком, молимо да се на задатак напише појединачи **делимични број бодова**.

Садржајни захтеви:

1. Код појединих задатака смо дали бодовање за више начина решавања. Уколико се нађе тачно **решење различито од наведених**, потражите у упутству делове који се подударају и на основу тога извршите бодовање.
2. Бодови у упутству се могу даље **разложити**. Међутим, број бодова који се додељује по задатку може бити само цео број.
3. У случају тачног поступка решавања и коначног решења максималан број бодова се даје и онда ако је код кандидата опис из упутства дат са **мање детаља**.
4. Ако у решењу има **рачунске грешке**, нетачности, бодови се не дају само на онај део где је ученик начинио грешку. Ако са погрешним делимичним резултатом даље ради тачним поступком, а проблем за решавање се у суштини не мења, додељују му се даљи делимични бодови.
5. У случају **принципијелне грешке** у оквиру једне мисаоне целине (у упутству означено двоструком линијом) ни за формално тачне математичке поступке се бодови не додељују. Уколико ученик наставља са радом и као почетни податак узима лоше решење које је добио због принципијелне грешке, а даље тачно рачуна у следећој мисаоној целини или делу питања, онда за тај део добија максималан број бодова, уколико се проблем за решавање у суштини није променио.
6. Ако се у упутству за решавање у загради налази нека **напомена** или нека **мерна јединица**, у случају њиховог недостатка се решење сматра да има потпуну вредност.
7. Од више тачних покушаја решења за један задатак **вреднује се она варијанта коју је кандидат означио**.
8. За решења се **наградни бодови** (бодови који прелазе прописани максимални број за дати задатак или његов део) **не могу доделити**.
9. За делимичне прорачуне који су са грешкама али их кандидат при решавању задатка није искористио **не одузимају се бодови**.
10. **Од означених задатака у испитном делу II се од назначених 5 задатка вреднују само решења за 4 задатка.** Кандидат је уписао у квадрат – вероватно - редни број задатка чије вредновање неће ући у укупан број бодова. Према томе, евентуално дато решење за означени задатак ни не треба исправљати. Ако и поред тога није једносмислено јасно за који задатак кандидат не жели да се бодује, онда ће задатак који се не бодује аутоматски бити онај који је последњи по истакнутом редоследу.

I.

1.		
Парни, односно непарни чланови једног аритметичког низа такође чине неки аритметички низ.	1 бод	*Ако се идеја појављује у решењу, онда се даје 1 бод.*
Непарних чланова има укупно 11, а парних има 10.	1 бод	
По услову задатка: $\frac{a_1 + a_{21}}{2} \cdot 11 = \frac{a_2 + a_{20}}{2} \cdot 10 + 15$.	2 бода	*За исписивање збира непарних, односно парних чланова 1 бод, за исписивање везе по тексту задатка 1 бод.*
Нека је разлика основног низа d, исписујући тиме једначину: $\frac{a_1 + a_1 + 20d}{2} \cdot 11 = \frac{a_1 + d + a_1 + 19d}{2} \cdot 10 + 15$.	1 бод	
Срeђивањем: $2a_1 + 20d = 30$.	1 бод	
Преписујући слично други услов задатка: $a_1 + 19d = 3(a_1 + 8d)$.	2 бода	
Срeђивањем: $2a_1 + 5d = 0$.	1 бод	
Решења система једначина: $a_1 = -5$, $d = 2$.	2 бода	
Тражени члан: $a_{15} = -5 + 14 \cdot 2 = 23$, а то одговара условима задатка.	1 бод	
Укупно:	**12 бодова**	

2. a)		
Означимо са a број ученика 9-10. разреда, а са A просечан број њихових бодова. Број ученика 11-12. разреда је на основу услова $100-a$.	1 бод	
На основу услова $a=1{,}5\cdot(100-a)$, одакле је $a=60$. Број ученика А 9-10. разреда је 60, а 11-12. разреда је 40.	2 бода	
Ако са B означимо просечан број бодова ученика 11-12. разреда, онда је $1{,}5A=B$.	1 бод	
Искоришћавајући просечан број бодова из претходног: $100=\frac{60A+40B}{100}=\frac{80B}{100}=\frac{4B}{5}$.	2 бода	
Одавде је $B=125$, односно просечан број бодова ученика 11-12. разреда је 125.	1 бод	
Укупно:	**7 бодова**	*Ако израчуна вредност А, добро заокружује вредности и тако одговори, 7 бодова се и онда дају.*

2. b)		
За избор 3 ученика од 100 ученика има $\binom{100}{3}$ $(=161700)$ једнако вероватних могућности.	1 бод	
Број могућности избора одговарајући услову: $\binom{60}{2}\cdot\binom{40}{1}$ $(=70800)$,	1 бод	
избор два и једног ученика су независни једно од другог.	1 бод	
Тражена вероватноћа је: $P=\frac{\binom{60}{2}\cdot\binom{40}{1}}{\binom{100}{3}}$,	1 бод	
значи $P=\frac{70800}{161700}$ $(\approx 0{,}44)$.	1 бод	*1 бод се даје и ако напише 44%*
Укупно:	**5 бодова**	

3.		
Једначина другог степена има један двоструки реалан корен, ако јој је дискриминанта 0.	1 бод	*Ако се идеја појављује у решењу, унда се даје 1 бод.*
Дакле, посматрајући дискриминанту једначине: $16(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-4\cdot4\cdot(1+\sin\alpha)=0$.	2 бода	
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-1-\sin\alpha=0$	2 бода	
Искоришћавајући идентичност $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, добијамо да је $2\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha=0$.	1 бод	
Прво решење		
$\sin\alpha(2\cos\alpha-1)=0$	2 бода	*За било који добар начин се даје 2 бода.*
Ово је могуће ако је а) $\sin\alpha=0$, дакле, $\alpha=k\pi$, где је $k\in\mathbf{Z}$;	1 бод	*Ако добије и нетачни корен и прихвати га, или је исписани систем корена са недостатком, од 5 бодова може добити највише 3.*
b) $2\cos\alpha-1=0$,	1 бод	
дакле $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{\pi}{3}+2n\pi$, где је $n\in\mathbf{Z}$,	1 бод	
или $\alpha=\frac{5\pi}{3}+2m\pi$, где је $m\in\mathbf{Z}$.	1 бод	
Због еквивалентних претварања добијени корени задовољавају почетну једначину.	1 бод	
Друго решење		
$2\sin\alpha\cos\alpha=\sin\alpha$ подижући обе стране на квадрат, сређујући $3\sin^2\alpha(3-4\sin^2\alpha)=0$	2 бода	
$\sin^2\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=n\pi, n\in Z$	1 бод	
$\sin^2\alpha=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\alpha=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ или $\alpha=\pm\frac{2\pi}{3}+2l\pi; k,l\in Z$	2 бода	
Откривање нетачних корена.	2 бода	
Укупно:	**13 бодова**	

4. a)		
Број пребројаних гласова у време објаве на радију: $10500 \cdot 0{,}76 \cdot 0{,}9 = 7182$	1 бод	
До тада број предатих неважећих гласова: 7182–(2014+2229+2805)=134	1 бод	
То је $\approx$ 1,9% до тада предатих гласова.	1 бод	
Укупно:	**3 бода**	

4. b)		
$\frac{2014}{7182} \approx 0{,}2804$, значи Алхемичар је имао 28% гласова; $\frac{2229}{7182} \approx 0{,}3104$, значи Сова је имао 31% гласова; $\frac{2805}{7182} \approx 0{,}3906$, значи Флаутиста је имао 39% до тада пребројаних гласова.	1 бод	
Одговарајући централни углови: Алхемичар—101º; Сова—112º; Флаутиста—140º	1 бод	
Неважећи гласови (1,9%)—7º	1 бод	
Шема кружног дијаграма.	1 бод	*Овај бод добија и онај ко је заборавио на неважеће гласове.*
Укупно:	**4 бода**	

4. c)		
Број гласова који још нису предати: 7182**:**9=798	1 бод	
Када би сви били важећи, и нпр. све их добије Алхемичар, онда би са 2812 гласова победио на изборима.	2 бода	
Укупно:	**3 бода**	

4. d)		
Ако је x тражени проценат, онда Флаутиста сихурно побеђује ако је $0{,}95 \cdot \frac{x}{100} > 0{,}05$; дакле $x > \frac{5}{0{,}95} \approx 5{,}3$.	3 бода	
Дакле ако Флаутиста при обради гласова од 95% води са барем 5,3 % испред кандидата који га прати, онда ће сигурно победити на изборима.	1 бод	
Укупно:	**4 бода**	

II.

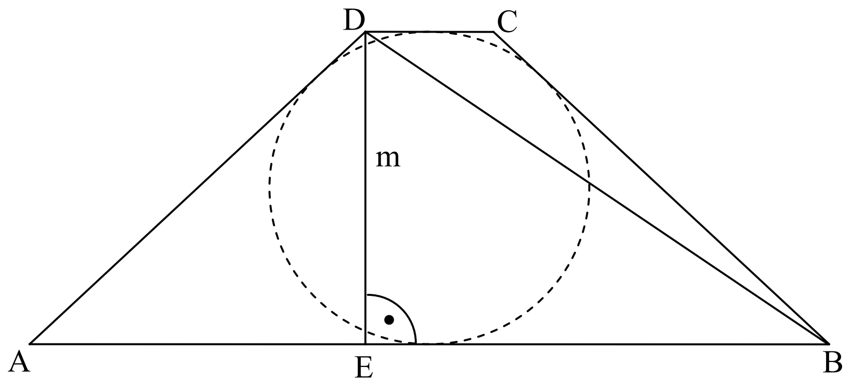
5. a)

Андрија за 20 минута, а Бела за 18,75 минута пређе пут узбрдо, зато се сусрећу када Андрија трчи низбрдо, а Бела трчи узбрдо.	3 бода	*Ако се смер кретања очита са графикона, и то вреди 3 бода. Ако добро рачуна, али не образлаже ко је у ком правцу трчао када су се срели, може добити 2 бода.*
Два ечака се на x кмод врха сусрећу. Тада је Андријино време трчања у сатима: $\frac{1}{3}+\frac{x}{20}$,	2 бода	
Белино време трчања у сатима: $\frac{5-x}{16}$.	1 бод	
Пошто је Андрија кренуо 10 минута раније, зато је $\frac{1}{3}+\frac{x}{20}=\frac{5-x}{16}+\frac{1}{6}$.	2 бода	
Одавде је $x=\frac{35}{27}\,\mathrm{km}\left(\approx 1{,}3\,\mathrm{km}\right)$.(Добијена вредност задовољава условима задатка.)	2 бода	
Укупно:	**10 бодова**	*Ако кандидат не узме у обзир да два дечака нису истовремено кренули, онда за део задатка а) може да добије највише 5 бодова.* *Ако кандидат не одреди удаљеност сусрета од врха брда, него само време, онда може добити највише 8 бодова.*

5. b)

Услов само тако може да се испуни, да девојке редом познају 0, 1, 2, …, 9 дечака.	2 бода	
Укупан број познанстава између дечака и девојака је $1+2+3+...+9=45$,	2 бода	
Да је сваки од 9 дечака познавао сваку од 6 девојака, то би значило 54 познанства. Из претходно наведеног то је немогуће.	2 бода	
Укупно:	**6 бодова**	*За добре покушаје са графом или бројчано, може се дати највише 3 бода.*

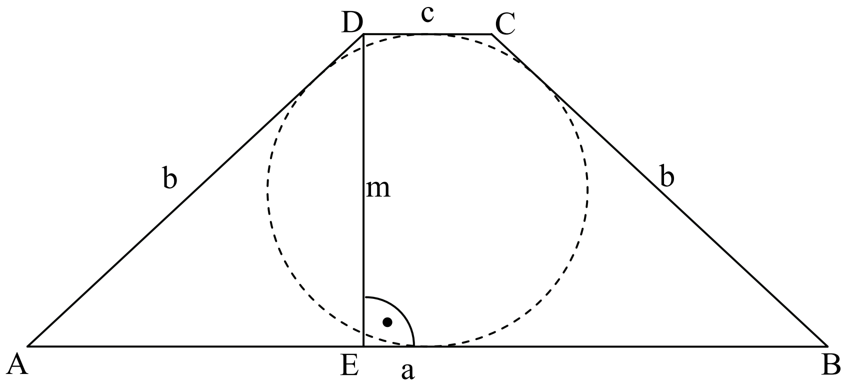
6. a)



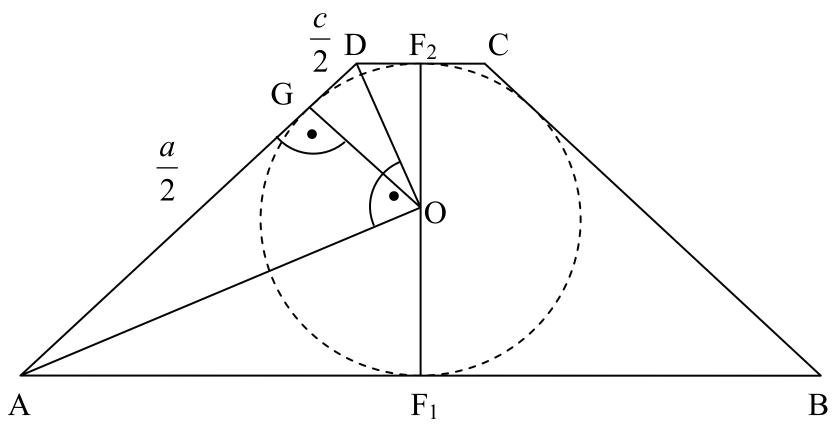
У трапезу $ABCD$ jeн $AB = 20$, $CD = 5$, и нека је подножје висине из темена D на страници AB означено са E. Са овим ознакама: $AE = \frac{AB - CD}{2} = \frac{15}{2}$, зато је $EB = \frac{25}{2}$.	1 бод	*Ако тачно одреди m позивајући се на теорему под c), онда се дају 3 бода.*
Трапез је тангентни четвороугао, па је $AD = \frac{AB + CD}{2} = \frac{25}{2}$.	1 бод	
(на основу Питагорине теореме) $m = DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = 10$.	1 бод	
$T = \frac{AB + CD}{2} \cdot m = 125$.	1 бод	
из троугла BED: $BD = \sqrt{DE^2 + EB^2} = \frac{5\sqrt{41}}{2} (\approx 16{,}01)$.	1 бод	
Укупно:	**5 бодова**	

6. b)

Добијено обртно (ротационо) тело се састоји из једног ваљка и две подударне обртне купе.	1 бод	*Ако се ова идеја појављује у решењу, следује 1 бод.*
Полупречник круга основе ваљка и купа је $r = m = 10$.	1 бод	
Висина ваљка је $CD = 5$, а висина купа је $AE = \frac{15}{2}$.	2 бода	
Тако да је запремина обртног тела: $V = 2 \cdot \frac{r^2 \pi \cdot AE}{3} + r^2 \pi \cdot CD = 1000\pi (\approx 3141{,}59)$.	1 бод	
Укупно:	**5 бодова**	

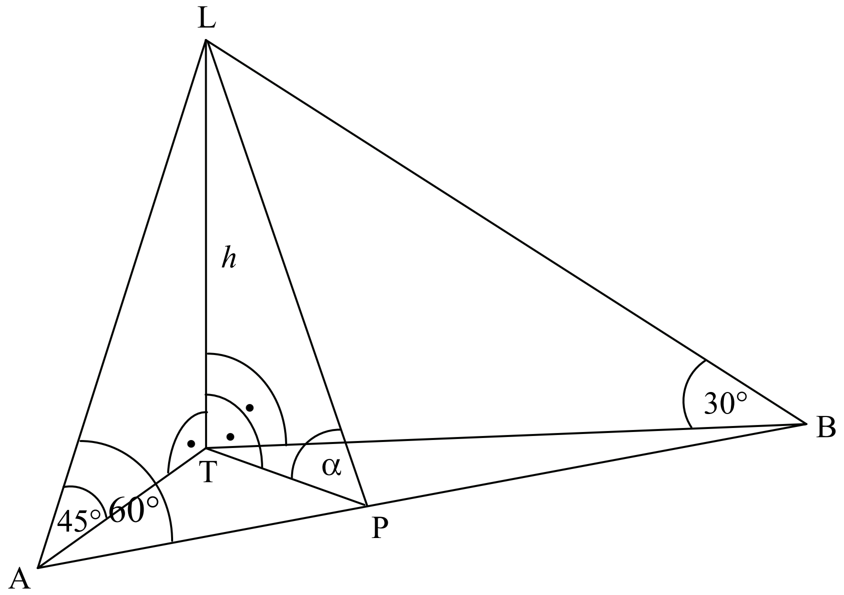
6. c) прво решење		
		
Ако су дужине основа посматраног трапеза a и c ($a \geq c$), дужина крака b, дужина висине m, онда треба увидети да је $m=\sqrt{ac}$, односно $m^2 = ac$.	1 бод	
Трапез је тангентни четвороугао, зато $b=\frac{a+c}{2}$.	1 бод	
Користећи ознаке на скици, због симетрије је $AE=\frac{a-c}{2}$.	1 бод	
На основу Питагорине теореме $m^2=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2-\left(\frac{a-c}{2}\right)^2=$	1 бод	
$=ac$.	2 бода	
Укупно:	**6 бодова**	

6. c) друго решење



Означимо са O центар уписане кружнице, а G додирну тачку са страницом AD . Тада је због једнакости тангентних дужи круга повучених из спољне тачке, користећи ознаке на шеми $AG = AF_1 = \frac{a}{2}$ és $DG = DF_2 = \frac{c}{2}$.	1 бод	*Ако се идеја појављује у решењу, или се види са шеме, онда се додељује један бод.*
Пошто је збир углова који леже на крацима трапеза 180°, а O пресечна тачка унутрашњих симетрала угла, зато је $DAO\angle + ODA\angle = 90^\circ$, дакле троугао AOD је код O правоугли,	1 бод	
а висина која припада хипотенузи је полупречник (OG) кружнице,	1 бод	
што је половина висине трапеза.	1 бод	
Исписујући теорему о висинама за троугао AOD је:	1 бод	
$\frac{m}{2} = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{c}{2}} \Leftrightarrow m = \sqrt{ac}$, шта смо желели да докажемо.	1 бод	
Укупно:	**6 бодова**	

7.



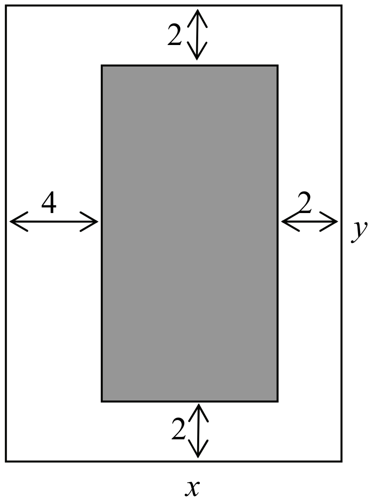
7. a)

Троугао ATL је једнакокраки правоугли троугао,	1 бод	
па је $AL = h\sqrt{2}\ (\approx 1191)$.	1 бод	
У правоуглом троуглу BLT $BL = \dfrac{h}{\sin 30°} = 2h(\approx 1684)$.	2 бода	
У троуглу ABL , на основу косинусне теореме $BL^2 = AL^2 + AB^2 - 2 \cdot AL \cdot AB \cdot \cos 60°$,	1 бод *	
$4h^2 = 2h^2 + AB^2 - \sqrt{2} \cdot h \cdot AB$,	1 бод *	*Ова два бода се дају и за једначину* $AB^2 - 1191AB - 1417375$ *=0*
$AB^2 - \sqrt{2} \cdot h \cdot AB - 2h^2 = 0$.	1 бод *	
Пошто је AB растојање, позитивно је, па је $AB = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2} h \approx 1927$ метара.	1 бод *	
Укупно:	**8 бодова**	

* *Ако у троуглу ABL прво израчуна непознате углове, то је по 1 бод* $(ABL\angle = 37{,}76°; ALB\angle = 82{,}24°)$*; затим добро напише косинусну теорему исто 1 бод; даје коначно решење- исто 1 бод.*

7. b)		
У правоуглом троуглу PLT $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{TP}$.	2 бода	
Пошто је α оштар угао, и ту је функција тангенса строго монотоно растућа, довољно је испитати разломак $\frac{h}{TP}$.	1 бод	
Пошто је бројилац константа, разломак је онда максималан, када је TP минимално.	1 бод	
То настаје онда када је TP управно на праву AB , односно висина троугла ABT , тако да је тражена тачка у троуглу ABT подножје висине повучене из темена T и налази се на правој AB .	1 бод	
Укупно:	**5 бодова**	

7. c)		
По услову је: $p_0 e^{Ch} = 0{,}8 p_0$.	1 бод	
$h = \frac{\log_e 0{,}8}{C} \left(= \frac{\lg 0{,}8}{C \lg e} \right)$,	1 бод	
Балон је био на висини $h \approx 1783\,(\mathrm{m})$.	1 бод	
Укупно:	**3 бода**	



8. а) **прво решење**		
Нека су дужине суседних страница једног листа x, y.	1 бод	*Ако је приказ датих непознатих на основу шеме једносмислен, даје се 1 бод.*
$xy = 600$, $y = \dfrac{600}{x}$. (1)	1 бод	
Површина штампања: $A = (x-6)(y-4)$, (2)	1 бод	
Где је $x > 6$ и $y > 4$; (односно $x \in \left]6;150\right[$)	1 бод *	
Замењујући (1) у (2): $A(x) = (x-6)\left(\dfrac{600}{x} - 4\right)$.	1 бод	
$A(x) = 624 - 4x - \dfrac{3600}{x}$	1 бод	
Треба да потражимо максимум функције $A(x)$. $A'(x) = -4 + \dfrac{3600}{x^2}$	1 бод	
$-4 + \dfrac{3600}{x^2} = 0$.	1 бод	
Корен основног скупа ове једначине: $x = 30$.	1 бод	*Бод означен са * се даје и онда ако кандидат тек овде одреди област дефинисаности променљиве x .*
Други извод: $A''(x) = -2 \cdot \dfrac{3600}{x^3}$.	1 бод	*Ако кандидат не одреди други извод, него образложи променом предзнака првог извода, и онда се дају 2 бода.*
Пошто је други извод на сваком позитивном месту негативан, па и код $x = 30$, дакле ту се налази максимум функције A .	1 бод	
Две странице једног листа су дугачке 30цм и 20цм.	1 бод	
Укупно:	**12 бодова**	

8. a) друго решење		
Нека су дужине суседних страница једног листа x, y.	1 бод	*Ако је приказ датих непознатих на основу шеме једносмислен, даје се 1 бод.*
Површина штампања: $A=(x-6)(y-4)$,	1 бод	
Где је $x>6$ и $y>4$.	1 бод *	
$A=xy-4x-6y+24=624-2\cdot(3y+2x)$	1 бод	
Вредност A је тачно онда максимална, када је вредност $3y+2x$ минимална.	1 бод	
Искоришћавањем неједначине између аритметичке и геометријске средине: $\frac{3y+2x}{2}\ge\sqrt{3y\cdot 2x}$,	2 бода	*Бод означен са * се даје и онда ако кандидат тек овде одреди област дефинисаности промењиве x .*
где искориштавањем xy=600 $\frac{3y+2x}{2}\ge\sqrt{6xy}=\sqrt{6\cdot 600}=60$.	2 бода	
Минимална вредност десне стране је 60 ако је $3y=2x$.	1 бод	
Одавде искориштавањем xy=600 се добија $x=30$ és $y=20$.	1 бод	
Две странице једног листа су дугачке 30цм и 20цм.	1 бод	
Укупно:	**12 бодова**	

8. b)		
На штампаним страницама су бројеви страница од 3 до 122 ,	1 бод	*2 бода се дају ако кандидат на било који начин одреди број страница на којима је цифра 2. Тачан одговор 1 бод, образложење 1 бод.*
међу њима је на 23 странице број 2.	1 бод	
Тражена вероватноћа: $P=\frac{23}{120}(\approx 0{,}1917)$.	2 бод	
Укупно:	**4 бода**	

9. a)		
За избор 3 столице од 9 има $\binom{9}{3}$ могућности.	1 бод	
На 3 изабране столице професори могу на $3! = 6$ различитих редоследа да седну.	1 бод	
Тако је број свих могућности: $\binom{9}{3} \cdot 6 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.	2 бода	
Укупно:	**4 бода**	*4 бода се дају и онда ако кандидат уз образложење напише тачно решење као број варијација. За тачно решење без образложења се даје 2 бода.*

9. b)		
Између 6 студената има 5 места на које може да седне професор. За три професорска места $\binom{5}{3}$, значи може на 10 начина.	2 бода	
Студенти један у односу на другог на $6! = 720$,	1 бод	
а професори на $3! = 6$ различитих редоследа могу да седну.	1 бод	
Укупан број могућности је: $\binom{5}{3} \cdot 6! \cdot 3! = 43200$.	2 бода	
Укупно:	**6 бодова**	

9. c)		
Додељивање награда може бити на 9! начина.	1 бод	*Ако кандидат добије тачно решење као производ вероватноћа ($\frac{6}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{84}$), за објашњење чинилаца по 1 бод, и позивање на међ. независност 1 бод.*
Први и трећи награђени је студент, то може на $6 \cdot 5 = 30$ различитих начина да се оствари.	2 бода	
Са изузетком посматраних два студента и професор биологије, остали награђени могу да добију награду на 6! начина.	1 бод	
Тако је тражена вероватноћа: $P = \frac{30 \cdot 6!}{9!} = \frac{5}{84} \approx 0{,}06$.	2 бода	
Укупно:	**6 бодова**	