ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2013. május 7.

MATEMATIKA NÉMET NYELVEN

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Wichtige Hinweise

Formvorschriften:

1. Die Arbeit ist mit einem **andersfarbigen Stift**, als der Abiturient ihn benutzt hat, zu korrigieren. Die Fehler und die fehlenden Schritte sind wie üblich zu markieren.
2. In den Kästchen neben den Aufgaben steht zuerst die maximale Punktzahl. Der Korrektor trägt die von ihm gegebene **Punktzahl in das zweite Kästchen** ein.
3. **Bei einwandfreier Lösung** kann ohne Angabe von Teilpunkten die maximale Punktzahl eingetragen werden.
4. Bei fehlerhaften oder mangelhaften Lösungen geben Sie bitte auch die **Teilpunkte** für die richtigen Schritte an.

Inhaltliche Fragen:

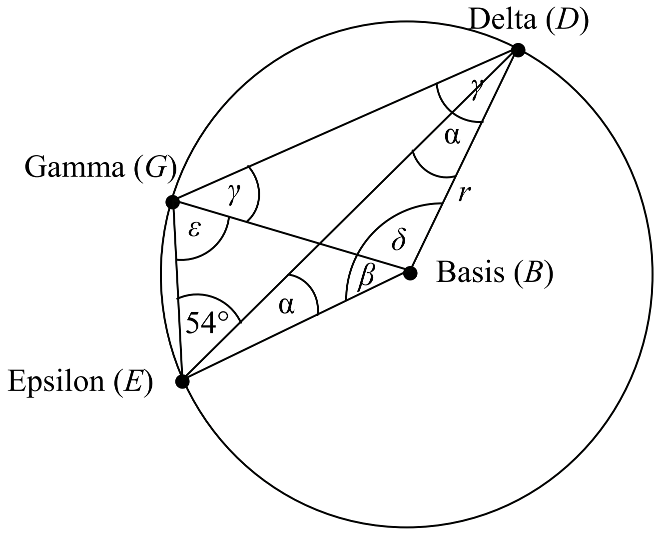
1. Bei einigen Aufgaben sind verschiedene Lösungswege angegeben. Wenn eine von diesen **unterschiedlichen Lösungen** vorkommt, suchen Sie die gleichwertigen Teile und verteilen die Punkte entsprechend.
2. Die vorgeschriebenen Punktzahlen lassen sich weiter **zerlegen**, dürfen aber nur als ganze Punkte vergeben werden.
3. Offensichtlich gute Lösungswege und Endergebnisse können auch dann mit maximalen Punktzahlen bewertet werden, wenn sie **weniger ausführlich** als die Musterlösung in der Anweisung beschrieben sind.
4. Wenn der Schüler einen **Rechenfehler** macht oder ungenau wird, aber damit das zu lösende Problem nicht wesentlich verändert wird, bekommt er nur für den Teil keinen Punkt, wo der Fehler lag. Wenn er mit falschem Teilergebnis, aber mit richtigem Gedankengang weiterrechnet, sind die weiteren Teilpunkte zu gewähren.
5. Begeht der Schüler einen **theoretischen Fehler**, so bekommt er innerhalb einer Gedankeneinheit auch für die formell richtigen mathematischen Schritte keinen Punkt. Wenn der Schüler in einer folgenden Teilaufgabe oder Gedankeneinheit, wo durch diesen Fehler das lösende Problem nicht wesentlich verändert wurde, mit diesem falschen Ergebnis als Ausgangswert richtig weiterrechnet, bekommt er die maximale Punktzahl für diesen neuen Teil.
6. Falls in der Musterlösung eine **Bemerkung** oder die **Einheit** bei dem Ergebnis in Klammern steht, ist die Lösung auch ohne diese als vollständig zu bewerten.
7. Bei mehreren Lösungsversuchen für eine Aufgabe ist nur der eine zu bewerten, **den der Kandidat markiert hat**.
8. **Zusatzpunkte** (mehr Punkte als die vorgeschriebene maximale Punktzahl für die Aufgabe) **sind nicht zugelassen**.
9. Es gibt **keinen Punktabzug** für Berechnungen und Schritte, die zwar falsch sind, aber eigentlich vom Schüler bei der Lösung der Aufgabe nicht verwendet werden.
10. **Im Teil II sind aus den 5 Aufgaben nur Lösungen von 4 zu bewerten**. Der Abiturient hat – vermutlich – die Nummer der Aufgabe, die nicht bewertet werden soll, in das entsprechende Kästchen eingetragen. Dementsprechend wird die eventuell vorhandene Lösung für diese Aufgabe nicht korrigiert. Wenn die abgewählte Aufgabe nicht eindeutig feststeht, dann ist die nicht zu bewertende Aufgabe automatisch die letzte Aufgabe der vorgegebenen Aufgabenreihe.

I.

1. a)		
Die Lösung kann nur eine Zahl x sein, für die $0{,}5 < x$.	1 Punkt	*Dieser Punkt steht ihm/ihr auch zu, wenn er/sie nur das Ergebnis mit dem Definitionsbereich vergleicht.*
Da $0 = \log_{\frac{1}{5}} 1$,	1 Punkt	
und die Logarithmusfunktion zur Basis $\frac{1}{5}$ streng monoton fallend ist, ist $2x - 1 > 1$,	1 Punkt	
d.h. $x > 1$. (Diese reellen Zahlen entsprechen auch den ursprünglichen Bedingungen.)	1 Punkt	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

1. b)		
Da $1=2^0$, und	1 Punkt	*Für das Aufschreiben der Ungleichung ohne Begründung stehen ihm/ihr diese zwei Punkte zu.*
die Exponentialfunktion mit der Basis 2 streng monoton steigend ist, ist $\lvert 2x - 1\rvert - 2 > 0$,	1 Punkt	
d.h. $\lvert 2x - 1\rvert > 2$. Die Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn $2x - 1 > 2$, oder	1 Punkt	*Diese 4 Punkte stehen ihm/ihr auch zu, wenn er/sie die Lösung vom Graphen abliest (2 Punkte), und er/sie kontrolliert, ob die abgelesenen Lösungen richtig sind (2 Punkte).*
$2x - 1 < -2$.	1 Punkt	
D.h. $x > 1{,}5$, oder	1 Punkt	
$x < -0{,}5$. (Die Lösungsmenge ist: $]-\infty; -0{,}5[\cup]1{,}5; +\infty[$)	1 Punkt	
Insgesamt:	**6 Punkte**	

2. a)		
Der Maßstab 1:500 000 bedeutet, dass 1 cm auf der Karte in der Wirklichkeit 500 000 cm,	1 Punkt	
also 5 km sind.	1 Punkt	
So ist der Abstand der Basis und der Türme $3{,}5 \cdot 5 = 17{,}5$ km.	1 Punkt	
Insgesamt:	**3 Punkte**	*Das richtige Ergebnis ohne Begründung 3 Punkte.*

2. b) **erste Lösung**		
		
Mit den Bezeichnungen der Abbildung: Die Dreiecke *EBD*, *BEG* und *BGD* sind gleichschenklig, da der Punkt *B* gleichweit von den anderen drei Punkten entfernt liegt.	1 Punkt	
$\beta+\delta=142°$, $\alpha=\dfrac{180°-142°}{2}=19°$,	1 Punkt	
$\varepsilon=54°+19°=73°$,	1 Punkt	
$\beta=180°-2\cdot 73°=34°$,	1 Punkt	
$\delta=142°-34°=108°$.	1 Punkt	
Z.B. wegen des Kosinussatzes:	1 Punkt	
$GD=\sqrt{17{,}5^2+17{,}5^2-2\cdot 17{,}5^2\cdot\cos 108°}\approx 28{,}3$ (km),	1 Punkt	
$EG=\sqrt{17{,}5^2+17{,}5^2-2\cdot 17{,}5^2\cdot\cos 34°}\approx 10{,}2$ (km),	1 Punkt	
$ED=\sqrt{17{,}5^2+17{,}5^2-2\cdot 17{,}5^2\cdot\cos 142°}\approx 33{,}1$ (km).	1 Punkt	
Der Gesamtweg am Montag $BE+EG+GD+DB=17{,}5+10{,}2+28{,}3+17{,}5=$ $=73{,}5\approx 74$ km.	1 Punkt	
Der Gesamtweg am Donnerstag: $BG+GE+ED+DB=17{,}5+10{,}2+33{,}1+17{,}5=$ $=78{,}3\approx 78$ km.	1 Punkt	
Insgesamt:	**11 Punkte**	

2. b) **zweite Lösung**		
Der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks *EDG* ist *B*, dessen Radius r = 17,5 (km), da *B* die gleiche Entfernung von den anderen drei Punkten hat.	1 Punkt	
Der Mittelpunktswinkel *GBD* ist 108°,	1 Punkt	
da er das Doppelte des Peripheriewinkels *GED* = 54° ist.	1 Punkt	
Der Mittelpunktswinkel *EBG* ist 142° - 108° = 34°.	1 Punkt	
Wegen dem Zusammenhang zwischen den Peripherie- und Mittelpunktswinkeln ist $\angle EDG =$ 17°,	1 Punkt	
und $\angle EGD$ = 109°.	1 Punkt	
Die Seiten des Dreiecks *EDG* kann man mit dem Zusammenhang $a = 2r \sin \alpha$: $GD = 35 \cdot \sin 54° \approx 28{,}32$ km,	1 Punkt	
$EG = 35 \cdot \sin 17° \approx 10{,}23$ km,	1 Punkt	
$ED = 35 \cdot \sin 109° \approx 33{,}09$ km.	1 Punkt	
Der Gesamtweg am Montag: $BE + EG + GD + DB = 17{,}5 + 10{,}23 + 28{,}32 + 17{,}5 =$ $= 73{,}55 \approx 74$ km.	1 Punkt	
Der Gesamtweg am Donnerstag: $BG + GE + ED + DB \approx 17{,}5 + 10{,}23 + 33{,}09 + 17{,}5 =$ $= 78{,}32 \approx 78$ km.	1 Punkt	
Insgesamt:	**11 Punkte**	
Wenn man die Seiten des Dreiecks EGD auf ganze Zahlen rundet, dann sind DG=28, EG=10, ED=33. Der Weg am Montag ist 73 km, der am Donnerstag 78 km. Man muss auch diese Lösung akzeptieren.		

3. a)		
In der dreistelligen Zahl abb_3 im Dreiersystem kann b drei, a zwei verschiedene Ziffern bedeuten, deshalb gibt es 6 Zahlen von der Form abb_3.	1 Punkt	
Schreiben wir sie sowohl im Dreier- als auch im Dezimalsystem auf: (siehe Tabelle unten)	3 Punkte	*Mindestens 8 richtige Zahlen aus 12: 1 Punkt, 11 richtige Zahlen aus 12: 2 Punkte.*
Drei Zahlen entsprechen den Bedingungen der Aufgabe: $200_3 = 18$, $211_3 = 22$ und $222_3 = 26$.	1 Punkt	
Insgesamt:	**5 Punkte**	

a	b	abb_3	Dezimals.
1	0	100	9
1	1	111	13
1	2	122	17
2	0	200	18
2	1	211	22
2	2	222	26

3. b) erste Lösung		
Eine fünfgliedrige Menge hat $2^5 = 32$ Teilmengen,	1 Punkt	
davon ist eine nullgliedrig,	1 Punkt	
5 eingliedrig.	1 Punkt	
Die Anzahl der mindestens zweigliedrigen Teilmengen ist also 32 – 6 = 26.	1 Punkt	
Genau in den Teilmengen ist das Produkt der Zahlen durch drei **nicht** teilbar, unter deren Elementen nur die Zahlen 2, 4 und 5 vorkommen.	1 Punkt	
Solche zweigliedrigen Teilmengen haben die Anzahl $\binom{3}{2} = 3$,	1 Punkt	
aus dreigliedrigen 1 Stück.	1 Punkt	
Die Anzahl der entsprechenden Teilmengen ist (26 – 4 =) 22.	1 Punkt	
Insgesamt:	**8 Punkte**	

3. b) **zweite Lösung**		
Wir rechnen zusammen, wie viele zweigliedrige Teilmengen die Menge {2; 3; 4; 5; 6} hat, in denen das Produkt der Glieder durch 3 teilbar ist,	1 Punkt	
also solche, unter deren Elementen ein durch 3 teilbares Element ist (3 oder 6).	1 Punkt	
Es gibt 8 Teilmengen, unter deren Elementen die 3, aber nicht die 6 ist, ($8=2^3$, zu 3 kann man aus den 2, 4, 5 wählen).	1 Punkt	
Von diesen sind 7 mindestens zweigliedrig, weil {3} als eingliedrige Teilmenge auch unter den 8 Teilemengen ist.	1 Punkt	
Es gibt 8 Teilmengen, unter deren Elementen die 6, aber nicht die 3 ist, ($8=2^3$, zu 6 kann man aus den 2, 4, 5 wählen).	1 Punkt	
Von diesen sind 7 mindestens zweigliedrig, weil {6} als eingliedrige Teilmenge auch unter den 8 Teilemengen ist.	1 Punkt	
Es gibt 8 Teilmengen, unter deren Elementen die 6, und auch die 3 sind, ($8=2^3$, zu 6 und 3 kann man aus den 2, 4, 5 wählen),	1 Punkt	
Die Anzahl der entsprechenden Teilmengen ist (7+7+8=) 22.	1 Punkt	
Insgesamt:	**8 Punkte**	

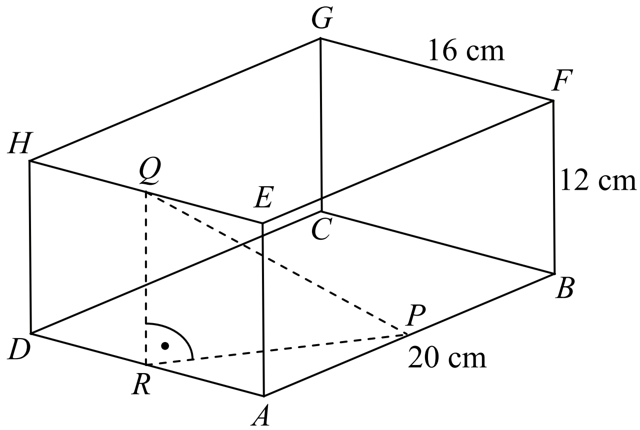
3. b) dritte Lösung		
Das Produkt der Elemente der mindestens zweigliedrigen Teilmengen ist genau dann durch 3 teilbar, wenn es unter den Elementen eine durch 3 teilbare Zahl ist (also aus den Zahlen 3 und 6 kommt mindestens die eine vor).	1 Punkt	
Es gibt $\binom{5}{2}=10$ zweigliedrige Teilmengen.	1 Punkt	
Unter ihnen kommen weder die 3 noch die 6 in $\binom{3}{2}=3$ vor.	1 Punkt	
Es gibt $\binom{5}{3}=10$ dreigliedrige Teilmengen.	1 Punkt	
Unter ihnen gibt es nur 1 Teilemenge ({2; 4; 5}), in der weder die 3 noch die 6 vorkommt.	1 Punkt	
In den mindestens viergliedrigen Teilmengen kommt mindestens eine der Zahlen 3 oder 6 vor, also sie alle entsprechen den Bedingungen.	1 Punkt	
Die Anzahl der mindestens viergliedrigen Teilemengen ist $\left(\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=\right)$ 6.	1 Punkt	
Die Anzahl aller entsprechender Teilmengen ist also: 7+9+6=22.	1 Punkt	
Insgesamt:	**8 Punkte**	

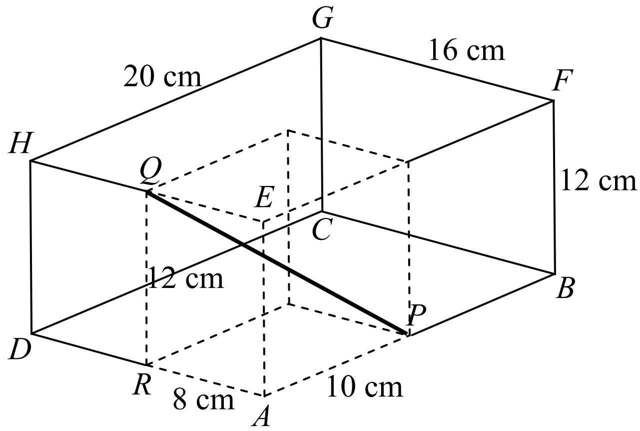
Bemerkungen:

1. *In der folgenden Tabelle sind die mindestens zweigliedrigen Teilmengen aufgezählt und die, die Bedingungen der Aufgabe entsprechen:*

Teilmengen	Insgesamt	Das Produkt der Glieder ist durch 3 teilbar
2-gliedrig	$\{2;3\}$, $\{2;4\}$, $\{2;5\}$, $\{2;6\}$, $\{3;4\}$, $\{3;5\}$, $\{3;6\}$, $\{4;5\}$, $\{4;6\}$, $\{5;6\}$.	$\{2;3\}$, $\{2;6\}$, $\{3;4\}$, $\{3;5\}$, $\{3;6\}$, $\{4;6\}$, $\{5;6\}$.
3-gliedrig	$\{2;3;4\}$, $\{2;3;5\}$, $\{2;3;6\}$, $\{2;4;5\}$, $\{2;4;6\}$, $\{2;5;6\}$, $\{3;4;5\}$, $\{3;4;6\}$, $\{3;5;6\}$, $\{4;5;6\}$.	$\{2;3;4\}$, $\{2;3;5\}$, $\{2;3;6\}$, $\{2;4;6\}$, $\{2;5;6\}$, $\{3;4;5\}$, $\{3;4;6\}$, $\{3;5;6\}$, $\{4;5;6\}$.
4-gliedrig	$\{2;3;4;5\}$, $\{2;3;4;6\}$, $\{2;3;5;6\}$,. $\{2;4;5;6\}$, $\{3;4;5;6\}$.	$\{2;3;4;5\}$, $\{2;3;4;6\}$, $\{2;3;5;6\}$, $\{2;4;5;6\}$, $\{3;4;5;6\}$.
5-gliedrig	{2; 3; 4; 5; 6}	{2; 3; 4; 5; 6}

2. Die Lösung ist auch vollständig, wenn er/sie aus allen Teilmengen die auswählt (aufzählt), die den Bedingungen der Aufgabe nicht entsprechen.
3. Wenn nur die entsprechenden Teilmangen aufgezählt werden, aber er/sie weißt darauf nicht hin, warum das Aufzählen nicht vollständig ist, kann er/sie für die Lösung höchstens 6 Punkte bekommen.
4. Wenn er/sie das logische Sieb benutzt, müssen die Punkte folgendermaßen verteilt werden:
die 3 ist drin" + „die 6 ist drin" – „die 3 und 6 sind drin"" *4 Punkte*
$\left(2^4-1\right)+\left(2^4-1\right)-2^3=15+15-8=22$ *4 Punkte*

4. a) **erste Lösung**		
		
Sei der Mittelpunkt der Kante *AD* *R*. Dann hat das Dreieck *PRQ* bei der Ecke *R* einen rechten Winkel.	1 Punkt	*Wenn dieser Gedanke nur während der Lösung vorkommt, steht ihm/ihr dieser Punkt zu.*
Im rechtwinkligen Dreieck *PAR* (mit dem Pythagoras-Satz): $PR^2 = 10^2 + 8^2 (= 164)$.	1 Punkt	
Da $QR = AE = 12$ (cm) ist, so ist im rechtwinkligen Dreieck *PRQ* (mit dem Pythagoras-Satz):	1 Punkt	
$PQ^2 = PR^2 + QR^2 = 12^2 + 10^2 + 8^2$. $PQ = \sqrt{308}$ $(\approx 17{,}55)$ (cm).	1 Punkt	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

4. a) **zweite Lösung**		
		
PQ ist die Raumdiagonale eines Quaders, dessen eine Ecke A ist, die drei Kanten aus A sind 10 cm, 8 cm und 12 cm lang.	2 Punkte	
Die Länge der Raumdiagonale PQ ist also: $PQ = \sqrt{12^2 + 10^2 + 8^2} = \sqrt{304}\ (\approx 17{,}55)\,(\text{cm}).$	2 Punkte	*1 Punkt für die richtige Verwendung der Formel der Raumdiagonale, 1 Punkt für die richtige Berechnung.*
Insgesamt:	**4 Punkte**	

4. b)		
Man kann verschiedene Kantenpaare auf so viele Weisen auswählen, auf wie viele Weisen man aus 12 verschiedenen Elementen 2 ohne Reihenfolge auswählen kann.	1 Punkt	*Dieser Punkt steht ihm/ihr auch zu, wenn er bei der richtigen Lösung diese Erklärung nicht hinzufügt.*
So ist die Anzahl der verschiedenen Geradenpaare: $\binom{12}{2}$,	1 Punkt	
deren Wert $\left(\frac{12 \cdot 11}{2} =\right) 66$ ist.	1 Punkt	
Insgesamt:	**3 Punkte**	

4. c)		
Alle Kantengeraden werden von anderen 4 weiteren Geraden geschnitten. Deshalb ist die Anzahl der einander schneidenden Geraden: $\frac{12\cdot 4}{2}=24$.	2 Punkte	*1 Punkt steht ihm/ihr bei der richtigen Rechnungsmethode zu, es sei denn der richtige Gedankengang nur aus der Lösung hervorkommt.*
Alle Kantengeraden sind zu weiteren 3 Kantengeraden parallel. Deshalb ist die Anzahl der parallelen Kantengeraden: $\frac{12\cdot 3}{2}=18$.	1 Punkt	
Alle Kantengeraden sind zu weiteren 4 windschief. So ist die Anzahl der windschiefen Geradenpaare: $\frac{12\cdot 4}{2}=24$.	1 Punkt	
Insgesamt:	**4 Punkte**	
Wenn man aus den drei Fällen zwei ausrechnet und das Ergebnis des Teiles b) benutzt, kann man die dritte Zahl erhalten. Wenn der Prüfling so vorgeht und er aus dem falschen Ergebnis von b) seine (falsche) Antwort richtig ausrechnet und dazwischen keine weiteren Fehler begeht, dann bekommt er die volle Punktzahl für Teil c).		

4. d)		
Der Abstand zweier windschiefer Geraden ist die Kantenlänge der dritten Kantengeraden, die auf beiden Kanten senkrecht steht (normale Transversale).	1 Punkt	*Dieser Punkt steht ihm/ihr auch zu, wenn die Abstände auf der Abbildung markiert sind, es gibt aber keine Begründung dazu.*
Der Abstand der Kantengeraden *AE* und *FG* (oder *BC)* ist $(EF=AB=)$ 20 cm.	1 Punkt	
Der Abstand der Kantengeraden *AE* und *HG* (oder *DC)* ist $(EH=AD=)$ 16 cm.	1 Punkt	
Insgesamt:	**3 Punkte**	

II.

5. a) erste Lösung		
Der Quotient der geometrischen Folge ist kleiner als eins, deshalb ist die aus den Summen gebildete Folge S_n konvergent,	1 Punkt	
ihr Grenzwert ist: $s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{32}{1-\frac{1}{128}}=\frac{4096}{127}\left(\approx 32{,}25\right)$.	2 Punkte	
(Da alle Glieder der geometrischen Folge positiv sind, S_n streng monoton steigend ist), $S_n<s=\frac{4096}{127}<32{,}5$, also ist die Aussage richtig.	1 Punkt	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

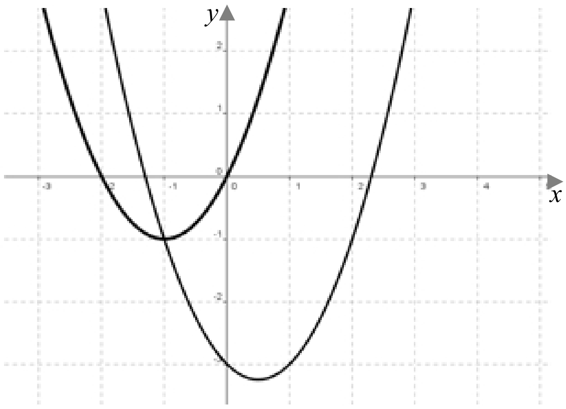
5. a) zweite Lösung		
Die Partialsumme der ersten n Glieder der Folge ist: $S_n=\dfrac{32\cdot\left(\frac{1}{128^n}-1\right)}{\frac{1}{128}-1}$, $S_n=\frac{2^{12}}{127}\cdot\left(1-\frac{1}{128^n}\right)$.	1 Punkt	
$\{S_n\}$ ist streng mon. steigend, (weil die Folge $\left\{\frac{1}{128^n}\right\}$ streng monoton fallend ist),	1 Punkt	
und für alle n: $S_n<\frac{2^{12}}{127}$.	1 Punkt	
$\left(S_n<\right)\frac{2^{12}}{127}=\frac{4096}{127}<32{,}5$, also ist die Aussage richtig.	1 Punkt	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

5. b)		
$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n =$ $= \frac{1}{128} \cdot \frac{32}{128} \cdot \frac{32^2}{128} \cdot \ldots \cdot \frac{32^{k-1}}{128} \cdot \ldots \cdot \frac{32^{n-1}}{128} =$	1 Punkt	
$= \frac{32^{1+2+3+\ldots+n-1}}{128^n}$	1 Punkt	
Der Exponent des Zählers ist die Summe der ersten $n-1$ positiven Zahlen, die in geschlossener Form $\frac{n(n-1)}{2}$ ist.	2 Punkte	
Da $32 = 2^5$ und $128 = 2^7$ ist, ist $\frac{32^{1+2+3+\ldots+n-1}}{128^n} = \frac{2^{5 \cdot \frac{n(n-1)}{2}}}{2^{7n}}$.	1 Punkt	
Da $2048 = 2^{11}$ ist, ist die Gleichung $\frac{2^{5 \cdot \frac{n(n-1)}{2}}}{2^{7n}} = \left(2^{11}\right)^{3n}$ zu lösen.	1 Punkt	
Daraus ist $2^{5 \cdot \frac{n(n-1)}{2}} = 2^{7n} \cdot 2^{33n} = 2^{40n}$,	1 Punkt	
woraus wegen der Ein-Eindeutigkeit der Exponentialfunktion folgt, dass	1 Punkt	
$5 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 40n$ ist.	1 Punkt	
(n ist eine positive ganze Zahl,) durch n geteilt. so ist $\frac{5}{2}(n-1) = 40$.	1 Punkt	
Die Lösung dieser Gleichung ist $n = 17$.	1 Punkt	
Die einzige Lösung der Originalgleichung ist $n = 17$.	1 Punkt	
Insgesamt:	**12 Punkte**	

6. a) erste Lösung		
Die zwei Parabeln haben einen gemeinsamen Punkt auf der x-Achse, wenn die quadratischen Gleichungen gemeinsame Wurzeln haben: $x^2+px+1=0$ und $x^2-x-p=0$.	1 Punkt	
Die gemeinsamen Lösungen sind Lösungen der Gleichung $x^2+px+1=x^2-x-p$.	2 Punkte	
Nach Ordnen: $x(p+1)=-(p+1)$.	1 Punkt	
Wenn $p=-1$ ist, dann sind alle reellen x Lösungen der Gleichung, also die zwei Parabeln sind identisch. ($y=x^2-x+1$). Dieser Fall ist nicht entsprechend.	1 Punkt	
Wenn $p\neq-1$ ist,	1 Punkt	
dann kann nur $x=-1$ vorkommen. Dann ist $p=2$.	1 Punkt	
Die Gleichungen der zwei Parabeln sind $y=x^2+2x+1$, und $y=x^2-x-2$. (Ihr gemeinsamer Punkt ist (–1; 0) .)	1 Punkt	
Insgesamt:	**8 Punkte**	

6. a) zweite Lösung		
Die zwei Parabeln haben einen gemeinsamen Punkt auf der x-Achse, wenn die quadratischen Gleichungen gemeinsame Wurzeln haben: $x^2+px+1=0$ und $x^2-x-p=0$.	1 Punkt	
Bezeichnet man die zwei nicht unbedingt verschiedenen Wurzeln der Gleichung $x^2+px+1=0$ mit x_1 und x_2, die der Gleichung $x^2-x-p=0$ mit x_1' und x_2'. Mit den Viète-Formeln:	1 Punkt	
$\left.\begin{matrix} x_1+x_2=-p \\ x_1\cdot x_2=1 \end{matrix}\right\}$ und $\left.\begin{matrix} x_1'+x_2'=1 \\ x_1'\cdot x_2'=-p \end{matrix}\right\}$	1 Punkt	
(1.) Die beiden Gleichungen haben die gleichen Wurzeln ($x_1=x_1'$, und $x_2=x_2'$). Dann ist nur $p=-1$. So beschreiben aber die zwei Gleichungen identische Parabeln: $y=x^2-x+1$, was wegen der Bedingungen der Aufgabe ausgeschlossen ist.	1 Punkt	
(2.) Wenn die zwei Lösungsmengen nicht identisch sind, aber gemeinsame Elemente haben, z.B.: $x_1=x_1'$: Aus den zweiten Gleichungen der Viète-Formeln folgen, dass $x_1\cdot x_2=1$ und $x_1\cdot x_2'=-p$ ist. Aus diesen: $x_2'=-px_2$. Aus den ersten Gleichungen der Viète-Formeln: $x_1+x_2=-p$ und $x_1-px_2=1$. Aus den Differenzen der entsprechenden Seiten ergibt sich: $x_2(p+1)=-(p+1)$.	1 Punkt	
Wenn $p=-1$ ist, dann ist der Fall (1.) erfüllt.	1 Punkt	
Wenn $p\neq-1$, dann ist $x_2=-1$. Dann ist $p=2$.	1 Punkt	
So sind die Gleichungen der zwei Parabeln $y=x^2+2x+1$, und $y=x^2-x-2$. (Ihr gemeinsamer Punkt ist (–1; 0) .)	1 Punkt	
Insgesamt:	**8 Punkte**	

6. b)



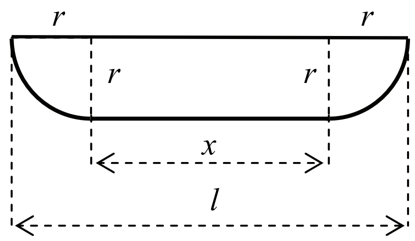
Die Skizzen der Parabeln $y = x^2 + 2x$ und $y = x^2 - x - 3$.	2 Punkte	*Je 1 Punkt pro richtige Parabeln.*
Die erste Koordinate des gemeinsamen Punktes der Parabeln ist –1.	1 Punkt	
Betrachte man die Funktionen $f:[-1;0] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$, und $g:[-1;0] \to \mathbf{R}$, $g(x) = x^2 - x - 3$: Die Fläche der gefragten Figur ist: $T = \int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_{-1}^{0} g(x)dx = \int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))dx$.	1 Punkt	*Wenn er/sie die zwei Funktionen getrennt integriert, dann subtrahiert er/sie sie auseinander richtig, bei richtigen Berechnungen stehen ihm/ihr diese 5 Punkte zu.*
$T = \int_{-1}^{0} \left(x^2 + 2x - \left(x^2 - x - 3\right)\right)dx = \int_{-1}^{0} (3x + 3)dx =$	2 Punkte	
$= \left[\frac{3x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{0} =$	1 Punkt	
$= 0 - \left(\frac{3}{2} - 3\right) = \frac{3}{2}$	1 Punkt	
Insgesamt:	**8 Punkte**	

7. a)

1. falsch	1 Punkt	*Für eindeutig angegebene richtige Antworten können die Punkte verteilt werden.*
2. falsch	1 Punkt	
3. richtig	1 Punkt	
4. richtig	1 Punkt	
5. falsch	1 Punkt	
Insgesamt:	**5 Punkte**	

7. b)		
Laut der Statistik kommt eine SMS mit $\frac{1}{60}$, d.h. mit etwa 0,0167 Wahrscheinlichkeit nicht an,	1 Punkt	*Diese 2 Punkte stehen ihm/ihr auch zu, wenn diese Gedanken nur aus der Lösung herauskommt.*
und so mit 1–0,0167=0,9833 Wahrscheinlichkeit kommt sie an.	1 Punkt	
Die Wahrscheinlichkeit, dass aus 3 SMS genau 1 nicht ankommt, ist: $\binom{3}{1}\cdot 0{,}9833^2\cdot 0{,}0167$,	1 Punkt	*Wenn der Binomialkoeffizient fehlt oder falsch ist, dann darf er/sie aus diesen letzten 2 Punkten höchstens 1 bekommen.*
annähernd 0,0484 d.h. 4,84%).	1 Punkt	
Insgesamt:	**4 Punkte**	*Wenn er/sie mit $\frac{1}{60}$ und mit $\frac{59}{60}$ rechnet, erhält er/sie $\frac{3481}{72000}$ $\approx 0{,}0483$.*

7. c)		
Wenn n SMS verschickt wurden, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle ankommen: $0{,}9833^n$.	1 Punkt	
Deshalb kommt mindestens eine SMS mit der Wahrscheinlichkeit von $1-0{,}9833^n$ nicht an.	1 Punkt	*2 Punkte bekommt er/sie für die folgende Aussage: Höchstens 2 % ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle SMS ankommen.*
Man sucht die kleinste natürliche Zahl n für die: $1-0{,}9833^n \geq 0{,}98$ gilt.	1 Punkt	
Geordnet: $0{,}02 \geq 0{,}9833^n$.	1 Punkt	
Daraus: $\log_{0,9833} 0{,}02 \leq n$ (da die Logarithmusfuktionen mit der Basis kleiner als 1 sind streng mon. fallend sind.),	1 Punkt	
$n \geq 232{,}3$.	1 Punkt	*Wenn er/sie mit* $\frac{1}{60}$ *und mit* $\frac{59}{60}$ *rechnet, dann bekommt er/sie n ≥ 232,8 als Lösung der Ungleichung.*
Also wenn man mindestens 233 SMS verschickt, ist die Wahrscheinlichkeit mindestens 0,98, dass von ihnen mindestens 1 nicht ankommt.	1 Punkt	
Insgesamt:	**7 Punkte**	*Wenn er/sie das Problem statt einer Ungleichung mit einer Gleichung löst, aber er/sie nicht begründet, dass er/sie den kleinsten Wert bekommen hat (z.B. mit der Monotonie), kann er/sie für die Lösung des Teiles c) höchstens 4 Punkte bekommen.*

8. a)		
		
Bezeichne man mit x die horizontale Strecke des abgerundeten Profils der Regenrinne, dann ist die Breite l der Rinne: $l = 2r + x$. Wegen der Bedingungen: $\frac{2r\pi}{2} + x = 20$	1 Punkt	
und $\frac{r^2\pi}{2} + rx = 55$.	1 Punkt	
Aus der ersten Gleichung: $x = 20 - r\pi$, was man in die zweite Gleichung einsetzt: $\frac{r^2\pi}{2} + r(20 - r\pi) = 55$.	1 Punkt	
$r^2\pi - 40r + 110 = 0$ $r_1 \approx 8{,}7$, dann ist $x_1 < 0$, d.h. es ist keine Lösung.	1 Punkt	
$r_2 \approx 4{,}0$, woraus $r = 4{,}0\,\text{cm}$ folgt.	1 Punkt	
So ist $x = 20 - 4\pi = 7{,}434... \approx 7{,}4$. Die Breite der Regenrinne ist $l = 2r + x \approx 8{,}0 + 7{,}4 = 15{,}4$ cm.	1 Punkt	
Insgesamt:	**6 Punkte**	*Wenn er/sie die Antworten auf nicht eine Nachkommastelle gerundet angibt, wird einmalig 1 Punkt abgezogen.*

8. b)		
Wegen der Bedingungen: $r \cdot \pi + x = 20$, und $T = r \cdot x + \frac{r^2 \cdot \pi}{2}$ maximal. $(x = 20 - r\pi)$ Das Maximum der Funktion $T(r) = r\,(20 - r\pi) + \frac{r^2\pi}{2} = -\frac{r^2\pi}{2} + 20r$ ($0 < r \leq \frac{20}{\pi}$) wird gesucht.	1 Punkt	
$T(r) = -\frac{r^2\pi}{2} + 20r$, mit dem ergänzen zu einem vollständigen Quadrat: $T(r) = -\frac{\pi}{2}\left(r - \frac{20}{\pi}\right)^2 + \frac{200}{\pi}$	2 Punkte*	
(Das erste Glied der Summe ist nicht positiv, das zweite Glied ist konstant, deshalb) ist die Summe maximal, wenn das erste Glied Null ist, also $r - \frac{20}{\pi} = 0$.	1 Punkt*	
Die Minimumstelle ist: $r = \frac{20}{\pi}$.	1 Punkt*	
Woraus wegen $x = 20 - r\pi = 0$: die Breite der Regenrinne mit der maximalen Durchflusskapazität ist $l = 2r + x = 2r$, was zu beweisen war.	1 Punkt	
Der Querschnitt der Regenrinne mit der maximalen Durchflusskapazität ist ein Halbkreis, dessen Radius $r = \frac{20}{\pi} \approx 6{,}4$ (cm) ist.	1 Punkt	
Die Aufgabe ist, das Volumen eines Halbzylinders auszurechnen, dessen Radius $r = \frac{20}{\pi} \approx 6{,}4$ cm und die Höhe, $l = 250$ ist. $V = \frac{\left(\frac{20}{\pi}\right)^2 \pi \cdot 250}{2}$	1 Punkt	*Wenn er/sie mit r=6,4 rechnet, bekommt er/sie den Wert:* $V = \frac{6{,}4^2 \cdot \pi \cdot 250}{2} \approx 16084{,}9$ (cm^3) *woraus wieder der richtige Wert 16 Liter auskommt.*
$V \approx 15915{,}5\ (\text{cm}^3)$	1 Punkt	
≈ 16 Liter	1 Punkt	
Insgesamt:	**10 Punkte**	

*Für den mit * markierten Teil für 4 Punkte werden noch zwei Rechnungsmethoden angegeben:*

II. Methode		
$r \mapsto -\frac{r^2\pi}{2} + 20r$ $(r \in \mathbf{R}^+)$ ist eine quadratische Funktion, in der der Hauptkoeffizient $(-\frac{\pi}{2})$ negativ ist, also die Funktion hat ein Maximum.	1 Punkt	
Die zwei Nullstellen der Funktion sind: $r_1 = 0$ und $r_2 = \frac{40}{\pi}$.	1 Punkt	
Die Maximumstelle ist das arithmetische Mittel der zwei Nullstellen: $r = \frac{20}{\pi}$.	1 Punkt	
Das ist auch die (absolute) Maximumstelle der gesuchten Funktion, weil $0 < r \le \frac{20}{\pi}$.	1 Punkt	

III. Methode		
Die Ableitungsfunktion der Funktion $r \mapsto -\frac{r^2\pi}{2} + 20r$ $(r \in \mathbf{R}^+)$ ist: $r \mapsto -r\pi + 20$ $(r \in \mathbf{R}^+)$.	1 Punkt	
Ihre Nullstellen sind: $-r\pi + 20 = 0$, *dann ist* $r = \frac{20}{\pi}$ eine mögliche Extremstelle.	1 Punkt	
Da die zweite Ableitung: $r \mapsto -\pi$ an dieser Stelle negativ ist, ist $r = \frac{20}{\pi}$ eine Maximumstelle.	1 Punkt	
Das ist auch die (absolute) Maximumstelle der gesuchten Funktion, weil $0 < r \le \frac{20}{\pi}$	1 Punkt	

9.		
Sei der Punktedurchschnitt von András in den ersten fünf Runden a. So ist die geworfene Punktzahl in den ersten fünf Runden: $5a$.	2 Punkte	
Er hat im sechsten, siebten, achten und neunten Spiel insgesamt $23+14+11+20=68$ Punkte geworfen.	1 Punkt	
Der Punktedurschnitt der ersten 9 Spiele ist: $\frac{5a+68}{9}$.	1 Punkt	
Laut der Bedingungen ist er größer als der Durchschnitt der ersten fünf Spiele,	1 Punkt	
d.h. $\frac{5a+68}{9}>a$	1 Punkt	
woraus $a<17$ folgt.	2 Punkte	
Sei die geworfene Punktzahl von András im zehnten Spiel x. Der Punktedurchschnitt der geworfenen Punkte von András nach dem zehnten Spiel ist: $\frac{5a+68+x}{10}$.	2 Punkte	
Laut der Bedingungen ist es: $\frac{5a+68+x}{10}\geq 18$,	1 Punkt	
d.h. $5a+68+x\geq 180$,	1 Punkt	
woraus $x\geq 112-5a$ folgt.	1 Punkt	
Da $a<17$ ist, ist $x\geq 112-5a>112-5\cdot 17=112-85=27$.	2 Punkte	
Da $x>27$ ist, musste András in der letzten Runde mindestens 28 Punkte werfen.	1 Punkt	
Insgesamt:	**16 Punkte**	