ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2015. május 5.

MATEMATIKA
NÉMET NYELVEN

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI
ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI
ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK
MINISZTÉRIUMA

Wichtige Hinweise

Formvorschriften:

1. Die Arbeit ist mit einem **andersfarbigen Stift**, als der Abiturient ihn benutzt hat, zu korrigieren. Die Fehler und die fehlenden Schritte sind wie üblich zu markieren.
2. In den Kästchen neben den Aufgaben steht zuerst die maximale Punktzahl. Der Korrektor trägt die von ihm gegebene **Punktzahl in das zweite Kästchen** ein.
3. **Bei einwandfreier Lösung** kann ohne Angabe von Teilpunkten die maximale Punktzahl eingetragen werden.
4. Bei fehlerhaften oder mangelhaften Lösungen geben Sie bitte auch die Teilpunkte für die richtigen Schritte an.

Inhaltliche Fragen:

1. Bei einigen Aufgaben sind verschiedene Lösungswege angegeben. Wenn eine von diesen **unterschiedliche Lösung** vorkommt, suchen Sie die gleichwertigen Teile und verteilen die Punkte entsprechend.
2. Die vorgeschriebenen Punktzahlen lassen sich weiter **zerlegen**, dürfen aber nur als ganze Punkte vergeben werden.
3. Offensichtlich gute Lösungswege und Endergebnisse können auch dann mit maximalen Punktzahlen bewertet werden, wenn sie **weniger ausführlich** als die Musterlösung in der Anweisung beschrieben sind.
4. Wenn der Schüler einen **Rechenfehler** macht oder ungenau wird, aber damit das zu lösende Problem nicht wesentlich verändert wird, bekommt er nur für den Teil keinen Punkt, wo der Fehler lag. Wenn er mit falschem Teilergebnis, aber mit richtigem Gedankengang weiterrechnet, sind die weiteren Teilpunkte zu gewähren.
5. Begeht der Schüler einen **theoretischen Fehler**, so bekommt er innerhalb einer Gedankeneinheit auch für die formell richtigen mathematischen Schritte keinen Punkt. Wenn der Schüler in einer folgenden Teilaufgabe oder Gedankeneinheit, wo durch diesen Fehler das lösende Problem nicht wesentlich verändert wurde, mit diesem falschen Ergebnis als Ausgangswert richtig weiterrechnet, bekommt er die maximale Punktzahl für diesen neuen Teil.
6. Falls in der Musterlösung eine **Bemerkung** oder die **Einheit** bei dem Ergebnis in Klammern steht, ist die Lösung auch ohne diese als vollständig zu bewerten.
7. Bei mehreren Lösungsversuchen für eine Aufgabe ist nur der eine zu bewerten, **den der Kandidat markiert hat.**
8. **Zusatzpunkte** (mehr Punkte als die vorgeschriebene maximale Punktzahl für die Aufgabe) **sind nicht zugelassen.**
9. Es gibt **keinen Punktabzug** für Berechnungen und Schritte, die zwar falsch sind, aber eigentlich vom Schüler bei der Lösung der Aufgabe nicht verwendet werden.
10. **Im Teil II sind aus den 5 Aufgaben nur Lösungen von 4 zu bewerten**. Der Abiturient hat – vermutlich – die Nummer der Aufgabe, die nicht bewertet werden soll, in das entsprechende Kästchen eingetragen. Dementsprechend wird die eventuell vorhandene Lösung für diese Aufgabe nicht korrigiert. Wenn die abgewählte Aufgabe nicht eindeutig feststeht, dann ist die nicht zu bewertende Aufgabe automatisch die letzte Aufgabe der vorgegebenen Aufgabenreihe.

I.

1. erste Lösung		
Die Berührungspunkte werden von der Geraden ausgeschnitten, die senkrecht auf g steht, und durch den Mittelpunkt des Kreises k geht.	1 Punkt	*Diese 2 Punkte sind auch zu geben, wenn sich diese Gedanken nur aus der Lösung herausstellen.*
Der Mittelpunkt vom Kreis k ist der Ursprung,	1 Punkt	
die Gleichung der Geraden, die durch den Ursprung geht und auf g senkrecht steht, ist: $3x - y = 0$.	2 Punkte	
Die Koordinaten der Schnittpunkte werden durch das folgende Gleichungssystem bestimmt: $\left.\begin{aligned} 3x - y &= 0 \\ 4x^2 + 4y^2 &= 90 \end{aligned}\right\}$	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn sich dieser Gedanke nur aus der Lösung heraus-stellt.*
Aus der ersten Gleichung: $y = 3x$,	1 Punkt	
das wird in die zweite eingesetzt: $40x^2 = 90$.	1 Punkt	
Daraus folgt, dass das Gleichungssystem zwei Lö-sungen hat: (1,5; 4,5)	1 Punkt	
und (–1,5; –4,5).	1 Punkt	
Ein Normalvektor der Tangenten ist: (1; 3).	1 Punkt	
Die Gleichungen der Tangenten sind: $x + 3y = 15$,	1 Punkt	
$x + 3y = -15$.	1 Punkt	
Insgesamt:	**12 Punkte**	

1. zweite Lösung		
Die Gleichung der Tangenten ist in der Form von $x + 3y = c$ zu schreiben.	1 Punkt	
Die Gerade $x + 3y = c$ berührt den Kreis genau dann, wenn das folgende Gleichungssystem eine Lösung hat: $\left.\begin{aligned} x + 3y &= c \\ 4x^2 + 4y^2 &= 90 \end{aligned}\right\}$	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn sich dieser Gedanke nur aus der Lösung heraus-stellt.*
Aus der ersten Gleichung: $x = c - 3y$	1 Punkt	$y = \frac{c-x}{3}$
das wird in die zweite eingesetzt: $4(c-3y)^2 + 4y^2 = 90$.	1 Punkt	$4x^2 + 4\left(\frac{c-x}{3}\right)^2 = 90$
Nach dem Quadrieren und geordnet: $40y^2 - 24cy + 4c^2 - 90 = 0$.	2 Punkte	$40x^2 - 8cx + 4c^2 - 810 = 0$
Es gibt eine Lösung, wenn die Diskriminante 0 ist.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn sich dieser Gedanke nur aus der Lösung herausstellt.*

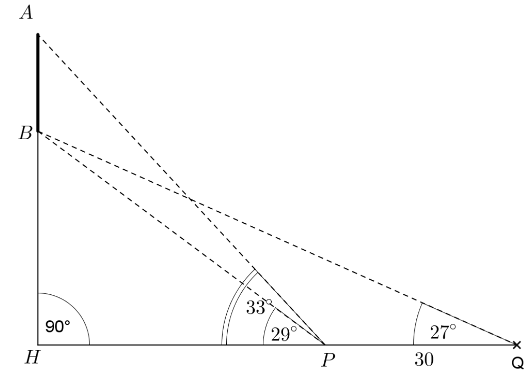
$576c^2 - 4\cdot 40\cdot(4c^2 - 90) = 0$,	1 Punkt	$64c^2 - 160\cdot(4c^2 - 810) = 0$
so ist $c^2 = 225$.	1 Punkt	
Also ist $c = 15$ oder $c = -15$.	1 Punkt	
Die Gleichungen der Tangenten sind: $x + 3y = 15$,	1 Punkt	
$x + 3y = -15$.	1 Punkt	
Insgesamt:	**12 Punkte**	

2. a)		
I: 6 Stück	1 Punkt	
II: 2 Stück	1 Punkt	
III: $500\cdot 0{,}082$ =	1 Punkt	
= 41 Mal	1 Punkt	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

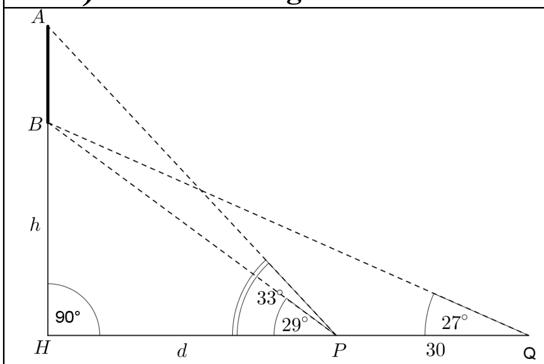
2. b)		
Anzahl aller Auswahlen ist: $\binom{40}{10}$.	1 Punkt	*Diese 2 Punkte sind auch zu geben, wenn sich diese Gedanken nur aus der Lösung herausstellen.*
Anzahl der günstigen Fälle ist: $\binom{8}{2}\cdot\binom{32}{8}$.	1 Punkt	
Die Wahrscheinlichkeit ist: $\dfrac{\binom{8}{2}\cdot\binom{32}{8}}{\binom{40}{10}} \approx$	1 Punkt	
$\approx 0{,}3474$.	1 Punkt	
Die relative Häufigkeit ist $\dfrac{0{,}332}{0{,}3474}\cdot 100 \approx 95{,}6\%$ der berechneten Wahrscheinlichkeit.	1 Punkt	
Insgesamt:	**5 Punkte**	

Anmerkung: Wenn der Kandidat nicht das entsprechende Modell verwendet (er benutzt z.B. die binomiale Verteilung), dann bekommt er für diesen Teil keinen Punkt.

2. c)		
Die Wahrscheinlichkeit, eine fehlerhafte Perle auszuwählen, ist $\dfrac{8}{40} = \dfrac{1}{5}$ = 0,2, die der einwandfreien ist 0,8.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn sich dieser Gedanke nur aus der Lösung herausstellt.*
Die Wahrscheinlichkeit ist: $\binom{10}{2}\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^8 \approx$	2 Punkte	*Nicht weiter zu zerlegen.*
$\approx 0{,}302$.	1 Punkt	*Andere richtig gerundete Werte sind auch akzeptabel (z.B. 0,3).*
Insgesamt:	**4 Punkte**	

3. a) erste Lösung		
 Richtige Abbildung, die die Angaben der Aufgabe enthält. (Die orthogonale Projektion des Turmes auf der Ebene der Wiese sei *H*.)	2 Punkte	*Wenn der Kandidat bei der Lösung die Angaben ohne Abbildung richtig verwendet, bekommt er diese 2 Punkte.*
Mit diesen Bezeichnungen ($BPH\angle = 29^o$, also) $BPQ\angle = 151^o$, ($BQP\angle = 27^o$, und) $PBQ\angle = 2^o$.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn die Größen zweier Winkel aus einer richtigen Abbildung hervorkommen.*
(Den Sinussatz für das Dreieck *BPQ* verwendet:) $\frac{BP}{30} = \frac{\sin 27°}{\sin 2°}$,	2 Punkte	
also $BP = 30 \cdot \frac{\sin 27°}{\sin 2°} \approx 390$ Meter.	1 Punkt	
Im rechtwinkligen Dreieck *BHP*: $BH = BP \cdot \sin 29°$.	1 Punkt	
Die Höhe des Berges ist etwa 189 Meter.	1 Punkt	
Insgesamt:	**8 Punkte**	

Anmerkung: Die anderen Entfernungen sind: $HP \approx 341$ m; $PA \approx 407$ m; $QB \approx 417$ m; $QA \approx 433$ m.

3. a) zweite Lösung		
 Richtige Abbildung, die die Angaben der Aufgabe enthält. (Die orthogonale Projektion des Turmes auf der Ebene der Wiese sei *H*.)	2 Punkte	*Wenn der Kandidat bei der Lösung die Angaben ohne Abbildung richtig verwendet, bekommt er diese 2 Punkte.*
Seien $HP = d$, $HB = h$ (die Höhe des Berges). Dann ist $h = d \cdot \text{tg}\, 29°$,	1 Punkt	
weiterhin ist $h = (d + 30) \cdot \text{tg}\, 27°$.	1 Punkt	

Also ist $d \cdot \operatorname{tg} 29° = (d+30) \cdot \operatorname{tg} 27°$,	1 Punkt	$\frac{h}{\operatorname{tg} 29°} = \frac{h}{\operatorname{tg} 27°} - 30$
so ist $d = \frac{30 \cdot \operatorname{tg} 27°}{\operatorname{tg} 29° - \operatorname{tg} 27°}$ (≈ 341 m),	2 Punkte	$h = \frac{30 \cdot \operatorname{tg} 29° \cdot \operatorname{tg} 27°}{\operatorname{tg} 29° - \operatorname{tg} 27°}$
und $h\ (= d \cdot \operatorname{tg} 29°) \approx 189$ m ist die Höhe des Berges.	1 Punkt	
Insgesamt:	**8 Punkte**	

3. b) erste Lösung		
Im Dreieck ABP sind $BPA\angle = 4°$ und $BAP\angle = 57°$.	1 Punkt	
(Den Sinussatz verwendet:) $\frac{AB}{BP} = \frac{\sin 4°}{\sin 57°}$,	2 Punkte	
so ist $AB \approx 390 \cdot \frac{\sin 4°}{\sin 57°}$.	1 Punkt	
Der Turm ist ≈ 32 Meter hoch.	1 Punkt	*Bei konsequenten Rundungen ist auch 33 Meter akzeptabel.*
Insgesamt:	**5 Punkte**	

3. b) zweite Lösung		
Weil $HA = d \cdot \operatorname{tg} 33°$ ist,	1 Punkt	
$HA \approx 221$ (m).	2 Punkte	*Für das Verwenden oder Berechnen von d ist 1 Punkt zu geben.*
$AB = HA - HB$	1 Punkt	
Der Turm ist ≈ 32 Meter hoch.	1 Punkt	*Bei konsequenten Rundungen ist auch 33 Meter akzeptabel.*
Insgesamt:	**5 Punkte**	

Anmerkung: Wenn der Kandidat in einer der Antworten nicht oder falsch rundet, dann soll er in dieser Aufgabe höchstens 1 Punkt verlieren.

4. erste Lösung		
Die Lösungen der Gleichung $4x^2 - 19x + 22 = 0$ sind: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{11}{4}$.	2 Punkte	
Weil der Hauptkoeffizient des Polynoms $4x^2 - 19x + 22 < 0$ auf der linken Seite positiv ist,	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch bei anderen richtigen Begründungen (z.B. richtige Abbildung) zu geben.*
deshalb ist $A = \left]2; \frac{11}{4}\right[$.	2 Punkte	*Wenn der Kandidat in einem der Endpunkte statt eines offenen ein abgeschlossenes Intervall aufschreibt, kann höchstens 1 Punkt bekommen.*

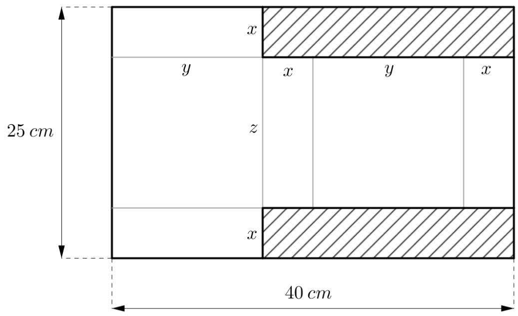
wegen $\sin 2x < 0$ $\pi + 2k\pi < 2x < 2\pi + 2k\pi$.	2 Punkte	$2x \in \left]\pi + 2k\pi ; 2\pi + 2k\pi\right[$
$\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi$,	1 Punkt	$B = \left]\frac{\pi}{2} + k\pi ; \pi + k\pi\right[$
wo $k \in \mathbf{Z}$ ist.	1 Punkt	
Weil bei $k = 0$: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$,	1 Punkt	$A = \left]2; \frac{11}{4}\right[\subset \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$
und weil $\frac{\pi}{2} < 2$ und $\frac{11}{4} < \pi$,	2 Punkte	$\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[\subset B$
deshalb gilt $A \subset B$.	1 Punkt	
Insgesamt:	**13 Punkte**	

Anmerkung: Wenn der Kandidat bei der Lösung der trigonometrischen Ungleichung die Periodizität nicht beachtet, kann höchstens 9 Punkte bekommen.
Wenn der Kandidat die trigonometrische Ungleichung in Grad löst, kann die 4 Punkte für die Lösung bekommen, aber die 4 Punkte für die Untersuchung von $A \subset B$ nicht.

4. zweite Lösung		
Die Lösungen der Gleichung $4x^2 - 19x + 22 = 0$ sind: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{11}{4}$.	2 Punkte	
Weil der Hauptkoeffizient des Polynoms $4x^2 - 19x + 22 < 0$ auf der linken Seite positiv ist,	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch bei anderen richtigen Begründungen (z.B. richtige Abbildung) zu geben.*
deshalb ist $A = \left]2; \frac{11}{4}\right[$.	2 Punkte	*Wenn der Kandidat in einem der Endpunkte statt eines offenen ein abgeschlossenes Intervall aufschreibt, kann höchstens 1 Punkt bekommen.*
Man muss beweisen, wenn $x \in \left]2; \frac{11}{4}\right[$ ist, dann ist $\sin 2x < 0$.	2 Punkte	*Diese 2 Punkte sind auch zu geben, wenn sich diese Gedanken nur aus der Lösung herausstellen.*
Wenn $2 < x < \frac{11}{4}$ ist, dann ist $4 < 2x < \frac{11}{2}$.	1 Punkt	*Wenn $x \in \left]2; \frac{11}{4}\right[$, dann $2x \in \left]4; \frac{11}{2}\right[$.*
Da $\pi < 4$ und $\frac{11}{2} < 2\pi$ gelten,	2 Punkte	$\left]4; \frac{11}{2}\right[\subset \left]\pi; 2\pi\right[$
weiterhin nimmt die Sinusfunktion im Intervall $\left]\pi; 2\pi\right[$ negative Werte an,	2 Punkte	
deshalb ist der Zusammenhang ($A \subset B$) richtig.	1 Punkt	
Insgesamt:	**13 Punkte**	

Anmerkung: Wenn der Kandidat die Aufgabe statt der Ungleichung sin 2x < 0 mit der Gleichung sin 2x = 0 richtig löst (und dadurch zu der Schlussfolgerung kommt, dass die Aussage der Aufgabe nicht richtig ist), kann er dafür die maximale Punktzahl bekommen.

II.

5. a) erste Lösung		
 ($x = 2$ cm) Eine Kante der Grundfläche des Quaders ist: $z = 25 - 2 \cdot 2 = 21$ (cm).	1 Punkt	
Die andere Kante ist aus dem Zusammenhang $40 = 2x + 2y$ zu berechnen:	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn sich dieser Gedanke nur aus der Lösung herausstellt.*
$y = 18$ (cm).	1 Punkt	
Die Oberfläche des Quaders ist: $A\left(= 2 \cdot (2 \cdot 21 + 2 \cdot 18 + 21 \cdot 18)\right) = 912\ \text{cm}^2$.	1 Punkt	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

5. a) zweite Lösung		
($x = 2$ cm) Aus dem Zusammenhang $40 = 2x + 2y$ ist	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn sich dieser Gedanke nur aus der Lösung herausstellt.*
$y = 18$ (cm).	1 Punkt	
Die andere Seite des ausgeschnittenen Rechtecks ist $2x + y = 22$ (cm).	1 Punkt	
Die Oberfläche des Quaders ist: $A = 40 \cdot 25 - 2 \cdot 2 \cdot 22 = 912\ \text{cm}^2$.	1 Punkt	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

5. b)		
(Die Längen der Quaderkanten werden in cm gemessen mit x, y und z bezeichnet – laut Abbildung in **a)**.) $0 < x < 12{,}5$,	1 Punkt	
$y = 20 - x$,	1 Punkt	
und $z = 25 - 2x$.	1 Punkt	
Das Volumen ist: $V(x) = x \cdot (20 - x) \cdot (25 - 2x)$.	1 Punkt	
Nach dem Auflösen der Klammern und zusammengefasst: $V(x) = 2x^3 - 65x^2 + 500x$ ($0 < x < 12{,}5$).	1 Punkt	
Die Ableitung der Volumenfunktion V ist: $V'(x) = 6x^2 - 130x + 500$.	1 Punkt	

(Die Funktion V kann in den Nullstellen der Ableitung Extremwerte haben.) $6x^2 - 130x + 500 = 0$	1 Punkt	
Die Lösungen sind $x_1 = 5$ und $x_2 = \frac{50}{3}$.	1 Punkt	
Die zweite ist keine Lösung der Aufgabe wegen des Definitionsbereiches der Funktion V.	1 Punkt	
Die zweite Ableitung der Volumenfunktion ist: $V''(x) = 12x - 130$. $V''(5) < 0$, also $x = 5$ ist wirklich eine Maximumstelle.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn der Kandidat mit dem Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung es begründet.*
Die kürzere Seite des ausgeschnittenen Rechtecks ist 5 cm.	1 Punkt	
Die Quaderkanten sind 5 cm, 15 cm und 15 cm, so ist das maximale Volumen: $V(= 5 \cdot 15 \cdot 15) = 1125\ \text{cm}^3$.	1 Punkt	
Insgesamt:	**12 Punkte**	

6. a)		
Der Baumgraph mit 9 Knoten hat 8 Kanten.	1 Punkt	
Die Summe der Gradzahlen ist (das Doppelte der Kantenzahl, also) 16.	2 Punkte	
Die Summe der angegebenen Gradzahlen ist 15.	1 Punkt	
Die fehlende Gradzahl ist 1.	1 Punkt	
Insgesamt:	**5 Punkte**	

Anmerkung: Wenn der Kandidat einen möglichen Graphen zeichnet, und abliest, dass die fehlende Gradzahl 1 ist, aber er beweist nicht, dass es keine andere Möglichkeit gibt, dann bekommt er 2 Punkte.

6. b)		
Im einfachen Graphen mit 9 Knoten können die Gradzahlen der Knoten von 0 bis 8 sein.	2 Punkte	
Die 0 und die 8 können gleichzeitig nicht vorkommen,	1 Punkt	
deshalb bleiben nur 8 Möglichkeiten, so gibt es (wegen des Schachtelprinzips) sicher eine wiederholte Gradzahl.	1 Punkt	
Es gibt also keinen einfachen Graphen mit 9 Knoten, in dem alle Knoten verschiedene Gradzahlen haben.	1 Punkt	
Insgesamt:	**5 Punkte**	

Anmerkung: Wenn der Kandidat genau den Satz zitiert, nach dem es in einem einfachen Graphen (aus mindestens zwei Knoten) immer zwei Knoten gibt, deren Gradzahlen gleich sind, dann kann er die 5 Punkte für diesen Teil bekommen.

6. c) erste Lösung		
Man kann aus 9 Menschen 2 auf $\binom{9}{2}$ Weisen, aus den restlichen 7 Menschen 2 auf $\binom{7}{2}$ Weisen, aus den restlichen 5 Menschen 2 auf $\binom{5}{2}$ Weisen, aus den restlichen 3 Menschen 2 auf $\binom{3}{2}$ Weisen auswählen.	2 Punkte	
Das Produkt der obigen ergibt die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten, wenn man auch die Reihenfolge der Paare beachtet.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn sich dieser Gedanke nur aus der Lösung herausstellt.*
(Die Reihenfolge der vier Paare zählt nicht,) das Produkt muss mit der Reihenfolge der vier Paare teilen,	1 Punkt	*Bei nicht so ausführlicher, aber eindeutiger Lösung sind diese Punkte zu geben.*
also mit (4!).	1 Punkt	
Die Anzahl der Möglichkeiten ist: $\dfrac{\binom{9}{2}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}}{4!} = 945.$	1 Punkt	
Insgesamt:	**6 Punkte**	

6. c) zweite Lösung		
Aus 9 Leuten kann man 4 auf $\binom{9}{4}$ Weisen auswählen.	1 Punkt	
Aus den restlichen 5 Leuten werden zu den ausgewählten je eine Person ausgewählt, das kann man auf $5\cdot4\cdot3\cdot2$ Weisen auswählen.	1 Punkt	
Das Produkt der obigen ergibt die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten, wenn man auch die Reihenfolge der Paare beachtet.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn sich dieser Gedanke nur aus der Lösung herausstellt.*
In allen ausgewählten Paaren kann man die Reihenfolge der zwei Menschen tauschen,	1 Punkt	*Bei nicht so ausführlicher, aber eindeutiger Lösung sind diese Punkte zu geben.*
so muss man das Produkt durch 2^4 teilen.	1 Punkt	
Die Anzahl der Möglichkeiten ist: $\dfrac{\binom{9}{4}\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{2^4} = 945.$	1 Punkt	
Insgesamt:	**6 Punkte**	

6. c) dritte Lösung		
Unter den 9 Menschen gibt es einen, der noch niemanden die Hand geschüttelt hat, ihn kann man auf 9 verschiedene Weisen auswählen.	2 Punkte	
Wenn man aus den restlichen 8 Menschen 1 auswählt, kann man zu ihm auf 7 Weise aus dem Rest den auswählen, dem er die Hand geschüttelt hat. Wenn man aus den restlichen 6 Menschen 1 auswählt, kann man zu ihm auf 5 Weise aus dem Rest den auswählen, dem er die Hand geschüttelt hat. Wenn man aus den restlichen 4 Menschen 1 auswählt, kann man zu ihm auf 3 Weise aus dem Rest den auswählen, dem er die Hand geschüttelt hat. Die restlichen zwei Leute haben einander die Hand geschüttelt.	2 Punkte	
Das Produkt der obigen ergibt die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn sich dieser Gedanke nur aus der Lösung herausstellt.*
Die Anzahl der Möglichkeiten ist: $9\cdot7\cdot5\cdot3=945$.	1 Punkt	
Insgesamt:	**6 Punkte**	

7. erste Lösung		
Bezeichne man mit n die Anzahl der Teilnehmer im Finale ($n>1$). Die Punktzahlen der Teilnehmer sind vom letzten bis zum ersten die aufeinanderfolgenden Glieder einer streng monoton wachsenden arithmetischen Folge, deren erstes Glied 1, die Differenz $d>0$ sind.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn sich dieser Gedanke nur aus der Lösung herausstellt.*
Weil man in allen Spielen genau 1 Punkt verteilt,	1 Punkt	*Diese 2 Punkte sind auch zu geben, wenn sich diese Gedanken nur aus der Lösung herausstellen.*
deshalb ist die Summe (der Punktzahlen der Teilnehmer) der ersten n Glieder der arithmetischen Folge gleich der Anzahl der Spiele.	1 Punkt	
Die Summe der ersten n Glieder ist: $\frac{n}{2}\cdot\left(2+(n-1)\cdot d\right)$,	1 Punkt	
die Anzahl der Spiele ist $\frac{n(n-1)}{2}$,	1 Punkt	
also gilt: $\frac{n}{2}\cdot\left(2+(n-1)\cdot d\right)=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$.	1 Punkt	

Also (durch $n \neq 0$ geteilt) $2+(n-1)\cdot d = n-1$.	1 Punkt	
Nach dem Auflösen der Klammern und zusammengefasst: $d\cdot(n-1)=n-3$.	1 Punkt	$2=(n-1)\cdot(1-d)$, weil $n-1>0$ gilt, deshalb ist $1-d>0$ erfüllt.
(Man weiß, dass $n \neq 1$, deshalb ist) $d=\frac{n-3}{n-1}\left(=1-\frac{2}{n-1}\right)$.	1 Punkt	
Daraus folgt, dass $d < 1$ ist.	1 Punkt	
d ist sicher das positive ganze Vielfache von 0,5,	1 Punkt	
was nur dann vorkommt, wenn $d = 0{,}5$ ist.	1 Punkt	
Dann ist aber $n-1=4$,	1 Punkt	
d.h. 5 Teilnehmer waren im Finale.	1 Punkt	
Der Sieger hat 3 Punkte erreicht.	1 Punkt	
Probe: Die Punktzahlen der Teilnehmer sind 1; 1,5; 2; 2,5 und 3, sie entsprechen den Bedingungen.	1 Punkt	
Insgesamt:	**16 Punkte**	

Anmerkung: Eine mögliche Ergebnistafel zeigt die folgende Abbildung.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**Punkte**
A		1-0	1-0	unent	unent	**3**
B	0-1		1-0	1-0	unent	**2,5**
C	0-1	0-1		1-0	1-0	**2**
D	unent.	0-1	0-1		1-0	**1,5**
E	unent	unent	0-1	0-1		**1**

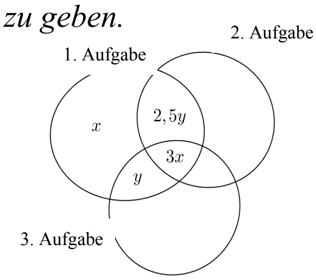
7. zweite Lösung		
Bezeichne man mit n die Anzahl der Teilnehmer im Finale ($n > 1$). Die Punktzahlen der Teilnehmer sind vom letzten bis zum ersten die aufeinanderfolgenden Glieder einer streng monoton wachsenden arithmetischen Folge, deren erstes Glied 1, die Differenz $d > 0$ sind.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn sich dieser Gedanke nur aus der Lösung herausstellt.*
Der Sieger hat $1+(n-1)d$ Punkte,	1 Punkt	
wo (weil er in allen Spielen höchstens 1 Punkt bekommen konnte, deshalb kann seine Höchstpunktzahl $n-1$ sein) $1+(n-1)d \le n-1$.	1 Punkt	
Woraus (wegen $n > 1$) $d \le \frac{n-2}{n-1}\left(=1-\frac{1}{n-1}\right)$ folgt.	1 Punkt	
Daraus ergibt sich, dass $d < 1$ ist.	1 Punkt	
d ist sicher das positive ganze Vielfache von 0,5,	1 Punkt	
was nur dann vorkommt, wenn $d = 0{,}5$ ist.	1 Punkt	
Weil man in allen Spielen genau 1 Punkt verteilt,	1 Punkt	*Diese 2 Punkte sind auch zu geben, wenn sich diese Gedanken nur aus der Lösung herausstellen.*
deshalb ist die Summe (der Punktzahlen der Teilnehmer) der ersten n Glieder der arithmetischen Folge gleich der Anzahl der Spiele.	1 Punkt	
Die Summe der ersten n Glieder ist $\frac{2+(n-1)\cdot 0{,}5}{2}\cdot n$,	1 Punkt	
die Anzahl der Spiele ist $\frac{n(n-1)}{2}$,	1 Punkt	
also gilt $\frac{2+(n-1)\cdot 0{,}5}{2}\cdot n = \frac{n(n-1)}{2}$.	1 Punkt	
Daraus folgt (wegen $n > 1$) $n = 5$.	1 Punkt	
5 Teilnehmer waren im Finale.	1 Punkt	
Der Sieger hat 3 Punkte erreicht.	1 Punkt	
Probe: Die Punktzahlen der Teilnehmer sind 1; 1,5; 2; 2,5 und 3, sie entsprechen den Bedingungen.	1 Punkt	
Insgesamt:	**16 Punkte**	

8. a)		
Die erste Koordinate der des weitesten Punktes der Parabel von der x-Achse ist das arithmetische Mittel der Nullstellen,	1 Punkt	
also ist $x = 6$.	1 Punkt	
Anhand der angegebenen Abbildung gilt, dass der weiteste Punkt der Funktion dritten Grades liegt dort, wo die Ableitung der Funktion Null ist.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn sich dieser Gedanke nur aus der Lösung herausstellt.*
$0{,}03x^2 - 1{,}44 = 0$,	1 Punkt	
also ist (benutzt, dass $x > 0$ ist) $x = \sqrt{48}$ ($\approx 6{,}93$).	1 Punkt	
Insgesamt:	**5 Punkte**	

8. b)		
(Die Fläche bekommt man aus der Differenz der Integrale der Funktionen zwischen den Schnitt-punkten.) $T = \int_0^{12}(-0{,}25x^2 + 3x)dx - \int_0^{12}(0{,}01x^3 - 1{,}44x)dx =$	1 Punkt	
$= \int_0^{12}(-0{,}01x^3 - 0{,}25x^2 + 4{,}44x)dx =$	1 Punkt	
$= \left[-0{,}0025x^4 - \frac{0{,}25}{3}x^3 + 2{,}22x^2\right]_0^{12}$	2 Punkte	
$T\left(= \frac{3096}{25}\right) = 123{,}84$.	1 Punkt	
Insgesamt:	**5 Punkte**	

Anmerkung: $\int_0^{12}(-0{,}25x^2 + 3x)dx = 72$ *und* $\int_0^{12}(0{,}01x^3 - 1{,}44x)dx = -\frac{1296}{25} = -51{,}84$.

8. c)		
$f(x) = \frac{-0{,}25x(x-12)}{0{,}01x(x-12)(x+12)}$	2 Punkte	
Nach dem Kürzen: $f(x) = -25 \cdot \frac{1}{x+12} = g(x)$.	1 Punkt	
Die Funktionsgleichung der Ableitung ist: $g'(x) = \frac{25}{(x+12)^2}$.	1 Punkt	*Wenn es sich aus der Abbildung des Kandidaten herausstellt, dass die Asymptoten der Hyperbel, die den Graphen von g enthält, y = 0 und x = –12 sind, dann bekommt er 1 Punkt, für die Darstellung des entsprechenden Hyperbelzweiges ist noch 1 Punkt zu geben.*
Das ist für alle $x \in]0;12[$ positiv,	1 Punkt	
deshalb ist *g* streng monoton steigend.	1 Punkt	
Insgesamt:	**6 Punkte**	

9. a)		
Wenn man mit x die Zahl der Schüler bezeichnet, die nur die erste Aufgabe gelöst haben, dann ist die Zahl der Schüler, die alle drei Aufgaben gelöst haben ist $3x$.	1 Punkt	*Für ein richtiges Venn-Diagramm sind 2 Punkte zu geben.* 
Sei die Zahl der Schüler, die nur die erste und dritte Aufgabe gelöst haben y. Dann ist die Zahl der Schüler, die nur die ersten zwei Aufgaben gelöst haben $2,5y$.	1 Punkt	
Aus den Angaben folgt: $4x + 3,5y = 22$ $3x + 2,5y = 16$	2 Punkte	
Die Lösung des Gleichungssystems ist $x = 2$, $y = 4$.	1 Punkt	
Alle drei Aufgaben konnten also ($3x =$) 6 Schüler lösen.	1 Punkt	
Probe im Text der Aufgabe.	1 Punkt	
Insgesamt:	**7 Punkte**	

9. b)		
Wenn der Durchschnitt der Noten 3,4 ist, dann ist ihre Summe $3,4 \cdot 30 = 102$.	1 Punkt	
Die Summe der fehlenden 6 Noten ist also $102 - (35 + 20 + 18 + 8 + 2) = 19$.	1 Punkt	
Wenn der Median der Noten 3,5 ist, dann sind die zwei mittleren Noten in der wachsenden Reihenfolge der Noten 3 und 4. So sind insgesamt 15 Noten mindestens 4 und 15 Noten höchstens 3.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist zu geben, wenn der Kandidat darauf hinweist, dass die 15. Note eine 3, die 16. eine 4 in der wachsenden Reihenfolge der Noten ist.*
(Wenn der Modus der Noten 4 ist, dann ist 4 die häufigste Note, also) unter den fehlenden Noten muss müssen mindestens 3 Stück Vieren sein.	1 Punkt	
Mehr Vieren konnten nicht vorkommen, weil es damit schon15 Noten gibt, die besser als 3 sind.	1 Punkt	
Die anderen 3 Noten sind höchstens 3, ihre Summe ist $19 - 12 = 7$.	1 Punkt	
Zwei Dreien können nicht vorkommen, sonst wäre auch die 3 ein Modus,	1 Punkt	
(und alle drei können nicht schlechter als 3 sein, so) gibt es eine 3 und zwei Zweien.	1 Punkt	
Die fehlenden Noten sind also: 4, 4, 4, 3, 2, 2.	1 Punkt	
Insgesamt:	**9 Punkte**	*Bei nicht so ausführlicher, aber eindeutiger Lösung ist die volle Punktzahl zu geben.*