ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2017. május 9.

MATEMATIKA
NÉMET NYELVEN

EMELT SZINTŰ
ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI
ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Wichtige Hinweise

Formvorschriften:

1. Die Arbeit ist mit einem **andersfarbigen Stift**, als der Abiturient ihn benutzt hat, **lesbar** zu korrigieren.
2. In den Kästchen neben den Aufgaben steht zuerst die maximale Punktzahl. Der Korrektor trägt die von ihm gegebene **Punktzahl in das zweite Kästchen** ein.
3. **Bei einwandfreier Lösung** markieren Sie neben der maximalen Punktzahl mit Haken, dass Sie die Gedankeneinheit gesehen haben, und sie als richtig beurteilt haben.
4. Bei fehlerhaften oder mangelhaften Lösungen **markieren** Sie den Fehler und geben Sie bitte auch die **Teilpunkte** für die richtigen Schritte an. Wenn die Korrektur besser nachvollziehbar ist, dann dürfen auch die verlorenen Punkte markiert werden. Kein Teil darf in der Arbeit bleiben, wo nach der Korrektur nicht eindeutig ist, ob er richtig, falsch oder überflüssig ist.
5. Während der Korrektur **benutzen Sie die folgenden Bezeichnungen:**
   - richtiger Schritt: *Haken*
   - theoretischer Fehler: *zweimaliges Unterstreichen*
   - Rechenfehler oder sonstige, nicht theoretischer Fehler: *einmaliges Unterstreichen*
   - mit falschen Ausgangsdaten durchgeführter richtiger Schritt: *gestrichelter oder durchgestrichener Haken*
   - mangelhafte Begründung, mangelhaftes Aufzählen, andere Mängel: *Mangelzeichen*
   - nicht verständlicher Teil: *Fragezeichen und/oder Wellenlinie*
6. Mit **Bleistift** geschriebenen Teile außer Abbildungen dürfen nicht bewertet werden.

Inhaltliche Fragen:

1. Bei einigen Aufgaben sind verschiedene Lösungswege angegeben. Wenn eine von diesen **unterschiedlichen Lösungen** vorkommt, suchen Sie die gleichwertigen Teile und verteilen die Punkte entsprechend.
2. Die vorgeschriebenen Punktzahlen lassen sich weiter **zerlegen, es sei denn der Lösungsschlüssel das nicht erlaubt**, dürfen aber nur als ganze Punkte vergeben werden.
3. Wenn der Schüler einen **Rechenfehler** macht oder ungenau wird, bekommt er nur für den Teil keinen Punkt, wo der Fehler lag. Wenn er mit falschem Teilergebnis, aber mit richtigem Gedankengang weiterrechnet, und dadurch das zu lösende Problem sich nicht wesentlich verändert, sind die weiteren Teilpunkte zu gewähren.
4. Begeht der Schüler einen **theoretischen Fehler**, so bekommt er innerhalb einer Gedankeneinheit (diese wird in der Anweisung mit Doppellinie markiert) auch für die formell richtigen mathematischen Schritte keinen Punkt. Wenn der Schüler in einer folgenden Teilaufgabe oder Gedankeneinheit mit diesem falschen Ergebnis als Ausgangswert richtig weiterrechnet, dadurch aber das zu lösende Problem sich nicht wesentlich verändert, bekommt er die maximale Punktzahl für diesen neuen Teil.

5. Wenn in der Anweisung eine **Einheit** oder eine **Bemerkung** in Klammern steht, dann kann die Lösung auch ohne diese mit voller Punktzahl bewertet werden.
6. Bei mehreren Lösungen für eine Aufgabe ist **nur die eine zu bewerten, die der Schüler markiert hat**. Während der Korrektur markieren Sie eindeutig, welche Version bewertet wurde, welche nicht.
7. **Zusatzpunkte** (mehr Punkte als die vorgeschriebene maximale Punktzahl für die Aufgabe) sind **nicht zugelassen**.
8. Die Gesamtpunktzahl einer Aufgabe oder Teilaufgabe **darf nicht negativ sein.**
9. Es gibt **keinen Punktabzug** für Berechnungen und Schritte, die zwar falsch sind, aber vom Schüler bei der Lösung der Aufgabe nicht weiterverwendet werden.
10. Während der Aufgabenlösung kann man **den Gebrauch des Taschenrechners – ohne weitere mathematische Begründung – bei den folgenden Rechnungen akzeptieren:** Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzieren, Wurzelziehen, Berechnen von $n!$, $\binom{n}{k}$, für die Ersetzung der Tabellen im Tafelwerk (sin, cos, tg, log und ihre Umkehrfunktionen), zur Angabe des Näherungswertes von der Zahlen π und e, zur Bestimmung der Lösungen einer auf Null reduzierten quadratischen Gleichung. Weiterhin darf man den Taschenrechner ohne mathematischen Begründung verwenden, wenn der Durchschnitt und die Streuung berechnet wird, es sei denn der Text der Aufgabe verlangt eindeutig die Nebenrechnungen dazu. **In anderen Fällen gelten die mit Taschenrechner durchgeführten Rechnungen als nicht begründete Schritte, für die keine Punkte verteilt werden können.**
11. Wenn **Abbildungen** als Beweise verwendet werden (z.B. das Ablesen der Daten durch Messung), ist nicht akzeptabel.
12. Bei der Angabe von **Wahrscheinlichkeiten** (wenn der Text der Aufgabe nichts Anderes sagt) dürfen auch in Prozent angegebene richtige Lösungen akzeptiert werden.
13. Wenn der Text der Aufgabe keine Rundung vorschreibt, dann sind auch Teil- und Endergebnisse akzeptierbar, die vom Lösungsschlüssel abweichen aber **sinnvoll und richtig gerundet wurden**.
14. **Im Teil II sind aus den 5 Aufgaben nur Lösungen von 4 Aufgaben zu bewerten.** Der Abiturient hat die Nummer der Aufgabe, die nicht bewertet werden soll, in das entsprechende Kästchen – vermutlich – eingetragen. Dementsprechend wird die eventuell vorhandene Lösung für diese Aufgabe nicht korrigiert. Wenn die abgewählte Aufgabe nicht eindeutig feststeht, und die Wahl der Aufgabe in der Arbeit nicht eindeutig zu sehen ist, dann ist die nicht zu bewertende Aufgabe automatisch die letzte Aufgabe der vorgegebenen Aufgabenreihe.

I.

1. a)		
Die Log-Funktion ist streng monoton steigend, deshalb ist $x < 100$.	1 Punkt	*Diese Punkte sind auch für eine entsprechende Abbildung zu geben.*
(Wegen der Definitionsbereich der Log-Funktion) $x > 0$.	1 Punkt	
Also $0 < x < 100$.	1 Punkt	*Die Lösungsmenge ist:* $]0; 100[$
Insgesamt:	**3 Punkte**	

1. b)		
Auf Null reduziert: $x^2 + 4x - 5 < 0$.	1 Punkt	
Die Lösungen der Gleichung $x^2 + 4x - 5 = 0$ sind und 1 und –5.	1 Punkt	
Da der Koeffizient des quadratischen Gliedes positiv ist,	1 Punkt	*Dieser Punkt ist für eine entsprechende Abbildung oder für den Term* $(x + 5)(x - 1) < 0$ *zu geben.*
deshalb ist $-5 < x < 1$.	1 Punkt	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

1. c)		
$0{,}5^{\lvert x-3\rvert} < 0{,}5^2$	1 Punkt	
Die Exponentialfunktion mit der Basis 0,5 ist streng monoton fallend, so ist	1 Punkt	
$\lvert x - 3\rvert > 2$.	1 Punkt	
Das ist erfüllt, wenn $x - 3 > 2$ oder $x - 3 < -2$,	1 Punkt	
also $x > 5$ oder $x < 1$.	1 Punkt	
Insgesamt:	**5 Punkte**	

Anmerkung: Wenn der Kandidat die Ungleichung $\lvert x - 3\rvert < 2$ *löst, kann höchstens 3 Punkte bekommen.*

2. a)		
(Wenn das mündliche Prüfungsergebnis Noemis x prozentig ist, dann ist) das Endergebnis der Prüfung $\frac{2\cdot 73 + 5\cdot 64 + 3x}{2+5+3}$ prozentig.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung auskommt.*
Laut des Textes: $\frac{2\cdot 73 + 5\cdot 64 + 3x}{2+5+3} \geq 70$.	1 Punkt	
$x \geq 78$	1 Punkt	
Noemi braucht ein mindestens 78%-iges Ergebnis in der mündlichen Prüfung.	1 Punkt	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

Anmerkung: Wenn der Kandidat statt einer Ungleichung eine Gleichung löst, und richtig antwortet, bekommt er die volle Punktzahl.

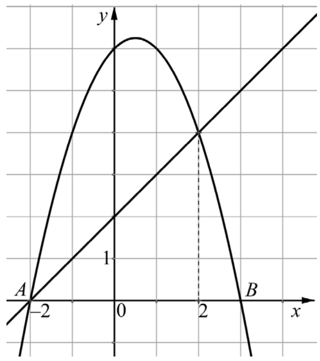
2. b) **erste Lösung**		
(Wenn es im ersten Jahrgang insgesamt n Prüflinge gab, dann ist) die Anzahl der Jungen $n - 75$, die Anzahl der Studenten, die nicht im Studentenheim gewohnt haben $n - 40$.	1 Punkt	*Diese Punkte sind auch dann u geben, wenn diese Gedanken nur aus der Lösung auskommen.*
Der Durchschnitt ist einerseits $\frac{75\cdot 70+(n-75)\cdot 62}{n}$, andererseits $\frac{40\cdot 71+(n-40)\cdot 65}{n}$.	1 Punkt	
Die Gleichung ist zu lösen: $\frac{75\cdot 70+(n-75)\cdot 62}{n}=\frac{40\cdot 71+(n-40)\cdot 65}{n}$	1 Punkt	
$n = 120$	2 Punkte	*Diese 2 Punkte sind für die Lösung der Gleichung zu geben.*
Im Jahrgang haben 120 Studenten die Prüfung abgelegt.	1 Punkt	
Probe anhand des Textes (in beiden Gruppierungen ist der Durchschnitt der 120 Studenten gleich 67%).	1 Punkt	
Insgesamt:	**7 Punkte**	

2. b) **zweite Lösung**		
Wenn die Anzahl der Jungs f, die Anzahl derjenigen, die nicht im Studentenheim wohnen k ist, dann ist der Durchschnitt der Prüfungen einerseits $\frac{75\cdot 70+f\cdot 62}{f+75}$, andererseits $\frac{40\cdot 71+k\cdot 65}{k+40}$.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung auskommt.*
Laut des Textes $f + 75 = k + 40$,	1 Punkt	
weiterhin gilt: $\frac{75\cdot 70+f\cdot 62}{f+75}=\frac{40\cdot 71+k\cdot 65}{k+40}$.	1 Punkt	
$f = 45$ (und $k = 80$).	2 Punkte	*Diese 2 Punkte sind für die Lösung der Gleichung zu geben.*
Im Jahrgang haben 120 Studenten die Prüfung abgelegt.	1 Punkt	
Probe anhand des Textes (in beiden Gruppierungen ist der Durchschnitt der 120 Studenten gleich 67%).	1 Punkt	
Insgesamt:	**7 Punkte**	

3. a)		
Der Median ist: 83,5 (kg),	1 Punkt	
der Durchschnitt ist: 79,75 (kg),	1 Punkt	
die Streuung ist: $\sqrt{\frac{2{,}25^2+5{,}75^2+10{,}25^2+8{,}25^2+2\cdot 5{,}25^2+16{,}75^2+8{,}75^2}{8}}=$	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn der Kandidat mit Taschenrechner rechnet, ohne Begründung richtig antwortet.*
$(=\sqrt{77{,}9375})\approx 8{,}83$ (kg).	1 Punkt	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

3. b)		
Weil 90 + 88 = 178 ist,	1 Punkt	
85 + 82 + 63 = 230 und 85 + 71 + 74 = 230 sind,	1 Punkt	
deshalb sind drei Runden wirklich genug.	1 Punkt	
Insgesamt:	**3 Punkte**	

3. c)		
(Die Gesamtmasse beliebiger 3 Personen ist kleiner als 300 kg.) Entweder fahren in allen Runden je 2 Personen (4 Runden), oder in einer Runde 2 in den weiteren 2 Runden je 3 Personen (3 Runden).	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung auskommt.*
Wenn in allen Runden je 2 Personen hochfahren, ist die Anzahl der unterschiedlichen Fälle: $\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}$ (= 2520).	1 Punkt	*Wenn die 8 Personen in einer Reihe aufgestellt sind, zählt in den vier Zweiergruppen die Reihenfolge innerhalb der Gruppe nicht. Die Anzahl der Möglichkeiten ist:* $\frac{8!}{(2!)^4}$ (= 2520).
Wenn sie mit drei Runden hochfahren, ist die Anzahl der Personen im Lift 2 + 3 + 3, oder 3 + 2 + 3, oder 3 + 3 + 2 .	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung auskommt.*
Alle Fälle können auf $\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{3}$ (= 560) verschiedene Weisen vorkommen,	1 Punkt	$\frac{8!}{2!\cdot(3!)^2}$
es gibt also $3\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{3}$ (= 1680) Fälle.	1 Punkt	
Die Anzahl der Möglichkeiten ist insgesamt: $\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}+3\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{3}=$	1 Punkt	
= 4200.	1 Punkt	
Insgesamt:	**7 Punkte**	

4. a)		
Die Schnittpunkte der Parabel und der Geraden kann man als Lösung des Gleichungssystems $\left.\begin{array}{l} y=-x^2+x+6 \\ 0=x-y+2 \end{array}\right\}$ erhalten.	1 Punkt	
Aus der 2. Gleichung wird y ausgedrückt: $-x^2+x+6=x+2$	1 Punkt	
(Geordnet: $x^2=4$, woher) $x_1=-2$ und $x_2=2$.	1 Punkt	
(Da der Parabelbogen im Intervall [–2; 2] über der Geraden liegt) $T=\int_{-2}^{2}\left((-x^2+x+6)-(x+2)\right)dx=$	1 Punkt*	
$=\int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx=$	1 Punkt*	
$=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2}=$	1 Punkt*	
$=\left(-\frac{2^3}{3}+4\cdot 2\right)-\left(-\frac{(-2)^3}{3}+4\cdot(-2)\right)=\frac{16}{3}-\left(-\frac{16}{3}\right)=$	1 Punkt*	
$=\frac{32}{3}$	1 Punkt*	
Insgesamt:	**8 Punkte**	

*Anmerkung: Die mit * markierten 5 Punkte kann der Kandidat auch für den folgenden Gedankengang erhalten:*

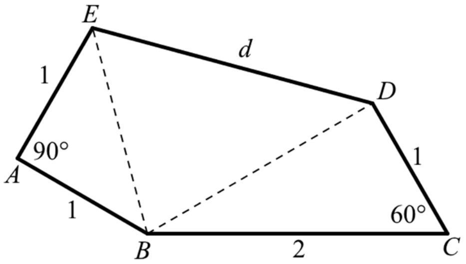
$\int_{-2}^{2}(-x^2+x+6)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{2}=$	1 Punkt	
$=\frac{34}{3}-\left(-\frac{22}{3}\right)=\frac{56}{3}$	1 Punkt	
$\int_{-2}^{2}(x+2)dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{2}=$	1 Punkt	
$=6-(-2)=8$	1 Punkt	
(Da der Parabelbogen im Intervall [–2; 2] über der Geraden liegt) $T=\frac{56}{3}-8=\frac{32}{3}$.	1 Punkt	

4. b)		
Im Schnittpunkt mit der x-Achse ist $y = 0$, so ist $-x^2 + x + 6 = 0$.	1 Punkt	
Daraus sind $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.	1 Punkt	
Da die 1. Koordinate vom Punkt B positiv ist, ist $B(3; 0)$.	1 Punkt	
Die Ableitungsfunktion von $f(x) = -x^2 + x + 6$ ($x \in \mathbf{R}$) ist $f'(x) = -2x + 1$ ($x \in \mathbf{R}$).	1 Punkt*	
Die Steigung der Tangente im Punkt B ist $f'(3) =$	1 Punkt*	
$(= -2 \cdot 3 + 1) = -5$.	1 Punkt*	
Insgesamt:	**6** Punkte	

*Anmerkung: Die mit * markierten 3 Punkte kann man auch für den folgenden Gedankengang erhalten:*

Die Geradengleichung der Geraden mit der Steigung m durch den Punkt B, die nicht parallel zur Parabelachse verläuft, kann in der Form $y = mx - 3m$ geschrieben werden.	1 Punkt	
Diese Gerade hat genau dann einen gemeinsamen Punkt mit der Parabel, wenn die Diskriminante der Gleichung $x^2 + (m-1)x - 3(m+2) = 0$ gleich Null ist.	1 Punkt	
Die Diskriminante ist $(m-1)^2 + 12(m+2) = (m+5)^2$, die Steigung der Tangente ist –5.	1 Punkt	

II.

5. a)		
 Das Dreieck ABE ist rechtwinklig und gleichschenklig,	1 Punkt	
deshalb ist $ABE\angle = 45°$.	1 Punkt	
Wenn ein regelmäßiges Dreieck mit der Seite von 2 Einheiten durch eine Symmetrieachse geschnitten wird, die erhaltenen Dreiecke sind mit dem Dreieck BCD kongruent (sie stimmen in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel überein),	1 Punkt	*Die Seitenmitte von BC wird mit der Ecke D verbunden. Diese Strecke zerlegt das Dreieck in ein regelmäßiges Dreieck mit der Seite von 1 Einheit und in ein gleichschenkliges Dreieck.*
deshalb ist $DBC\angle = 30°$.	1 Punkt	
Der eingeschlossene Winkel der zwei Diagonalen ist: $EBD\angle = ABC\angle - ABE\angle - DBC\angle = 75°$.	1 Punkt	
Insgesamt:	**5 Punkte**	

5. b) erste Lösung		
$\cos 75° = \cos(30° + 45°) =$ $= \cos 30° \cdot \cos 45° - \sin 30° \cdot \sin 45° =$	1 Punkt	
$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$	1 Punkt	
$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ (Die Aussage ist wahr).	1 Punkt	
Insgesamt:	**3 Punkte**	

Anmerkung: Berechnungen mit Näherungswerten sind nicht akzeptabel.

5. b) zweite Lösung		
$\cos^2 75° = \frac{1 + \cos 150°}{2} =$	1 Punkt	
$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$.	1 Punkt	
Da $\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{8 - 2\sqrt{12}}{16} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$ ist, ist die Aussage wahr (da $\cos 75° > 0$ gilt).	1 Punkt	
Insgesamt:	**3 Punkte**	

Anmerkung: Berechnungen mit Näherungswerten sind nicht akzeptabel.

5. c)		
$BE = \sqrt{2}$	1 Punkt	
$BD = \sqrt{3}$	1 Punkt	
Laut des Kosinussatzes im Dreieck EBD: $DE^2 = 2 + 3 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} =$	1 Punkt	
$= 2 + \sqrt{3}$.	1 Punkt	
Also wirklich ist $DE = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.	1 Punkt	
Insgesamt:	**5 Punkte**	

5. d)		
$\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{8 + 2\sqrt{12}}{4} =$	1 Punkt	$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} =$
$= 2 + \sqrt{3} \left(= \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^2 \right)$	1 Punkt	$\sqrt{\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} =$
Beide angegebenen Zahlen sind positiv, ihr Quadrat ist gleich, die Aussage ist richtig.	1 Punkt	$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$
Insgesamt:	**3 Punkte**	

Anmerkung: Wenn der Kandidat für die Begründung Näherungswerte verwendet, bekommt er 0 Punkte.

6. a)		
(1) wahr (2) falsch (3) wahr (4) wahr (5) falsch	3 Punkte	*4 richtige Antworten: 2 Punkte, 3 richtige Antworten: 1 Punkt. Weniger als 3 richtige Antworten: 0 Punkte.*
Insgesamt:	**3 Punkte**	

6. b)		
Die Aussage ist falsch.	1 Punkt	
Ein entsprechendes Gegenbeispiel (ein einfacher Graph mit höchstens 8 Kanten ohne Kreis).	2 Punkte	
Insgesamt:	**3 Punkte**	

6. c)		
Die Umkehrung: Wenn ein (einfacher) Graph (mit zehn Knoten) keinen Kreis enthält, hat der Graph höchstens 8 Kanten.	1 Punkt	
Die Umkehrung ist falsch.	1 Punkt	
Beliebiges Gegenbeispiel (ein Baum mit zehn Knoten).	2 Punkte	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

6. d) erste Lösung		
Der vollständige Graph mit 10 Knoten hat $\left(\frac{10\cdot 9}{2}=\right)$ 45 Kanten.	1 Punkt	
Die Auswahl der drei Kanten kann auf $\binom{45}{3}$(= 14 190) verschiedene Weisen vorkommen (sie sind alle gleichwahrscheinlich).	1 Punkt	
Man bekommt einen Kreis aus drei Kanten, wenn die Endpunkte der Kanten insgesamt 3 Ecken des Graphen verbinden, deshalb entspricht die Auswahl beliebiger drei Knoten der Auswahl eines Kreises aus drei Kanten.	1 Punkt	
Anzahl der günstigen Fälle $\binom{10}{3}$(= 120).	1 Punkt	
Die Wahrscheinlichkeit ist: $\dfrac{\binom{10}{3}}{\binom{45}{3}} \approx$	1 Punkt	
≈ 0,0085.	1 Punkt	
Insgesamt:	**6 Punkte**	

6. d) **zweite Lösung**		
Der vollständige Graph mit 10 Knoten hat $\left(\frac{10\cdot 9}{2}=\right)$ 45 Kanten.	1 Punkt	
Die erste ausgewählte Kante ist beliebig. Die zweite ausgewählte Kante muss einen gemeinsamen Endpunkt mit der ersten Kante haben.	1 Punkt	
Aus beiden Endpunkten der ersten Kante gehen je 8 Kanten aus, aus den übriggebliebenen 44 Kanten muss man eine von diesen auswählen, die Wahrscheinlichkeit einer guten Auswahl ist in diesem Schritt also $\frac{16}{44}$.	1 Punkt	
Im dritten Schritt muss man unbedingt die Verbindungskante der nicht gemeinsamen Knoten der schon ausgewählten Kanten aus den übriggebliebenen 43 Kanten auswählen, die Wahrscheinlichkeit dieses Schrittes ist also $\frac{1}{43}$.	1 Punkt	
(Da die drei Auswahlen unabhängig sind,) ist die gefragte Wahrscheinlichkeit $\frac{16}{44}\cdot\frac{1}{43}=$	1 Punkt	
$\left(=\frac{4}{473}\right)\approx 0{,}0085$.	1 Punkt	
Insgesamt:	**6 Punkte**	

6. d) **dritte Lösung**		
Der vollständige Graph mit 10 Knoten hat $\left(\frac{10\cdot 9}{2}=\right)$ 45 Kanten.	1 Punkt	
Die Auswahl der drei Kanten kann auf $\binom{45}{3}$(= 14 190) verschiedene Weisen vorkommen (sie sind alle gleichwahrscheinlich).	1 Punkt	
Zeichne man eine Kante! Das kann man auf 45 Weisen tun. Die zwei Kanten aus den Endpunkten dieser Kante, die in eine der 8 übriggebliebenen Knoten gezogen sind, bilden mit der ausgewählten Kante zusammen einen Kreis des Graphen. Im Graphen kann man dementsprechend insgesamt $45\cdot 8$ (= 360) Kreise mit drei Kanten zeichnen,	1 Punkt	
dann wurden aber alle Kreise genau dreimal gezeichnet. Also die Anzahl der verschiedenen Kreise mit 3 Kanten ist 120.	1 Punkt	
Die Wahrscheinlichkeit ist: $\frac{120}{\binom{45}{3}}\approx$	1 Punkt	
$\approx 0{,}0085$.	1 Punkt	
Insgesamt:	**6 Punkte**	

7. a)		
Wegen der Bedingungen reicht es, die Winkel des Dreiecks zu untersuchen. Den mittleren Winkel des Dreiecks bezeichnet man mit a, die Differenz der Folge mit d ($d > 0$), die Winkel des Dreiecks sind $a - d$, a und $a + d$ Grad groß (a und d sind ganze Zahlen).	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung auskommt.*
$(a - d) + a + (a + d) = 180$, woraus $a = 60$ ist (der mittlere Winkel des Dreiecks).	1 Punkt	
Wenn das Dreieck spitzwinklig (und d positiv ganz) ist, dann ist der größte Winkel mindestens 61, höchstens 89 Grad groß.	1 Punkt	
Es gibt also 29 verschiedene Dreiecke, die den Bedingungen entsprechen.	1 Punkt	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

7. b) erste Lösung		
Die Summe der Innenwinkel eines solchen n-Ecks ist in Grad gemessen n^2, so ist $n^2 = (n-2) \cdot 180$.	1 Punkt	
$n^2 - 180n + 360 = 0$ ($n \in \mathbf{N}$ und $n \geq 3$).	1 Punkt	
Die Lösungen der quadratischen Gleichung sind nicht ganz ($\approx 177{,}98$, bzw. $\approx 2{,}02$).	1 Punkt	
Es gibt kein n-Eck, das den Bedingungen entspricht.	1 Punkt	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

7. b) zweite Lösung		
Wenn ein Innenwinkel eines regelmäßigen Vielecks 179° ist, dann hat es 360 Seiten (und nicht 179), also $n \neq 179$.	1 Punkt	
Wenn ein Innenwinkel eines regelmäßigen Vielecks 178° ist, dann hat es 180 Seiten (und nicht 178), also $n \neq 178$. Wenn ein Innenwinkel eines regelmäßigen Vielecks 177° ist, dann hat es 120 Seiten (und nicht 177), also $n \neq 177$.	1 Punkt	
Der Außenwinkel $\left(\frac{360°}{n}\right)$ des regelmäßigen n-Ecks steht mit n in indirekter Proportionalität. Wenn der Innenwinkel fällt, dann fällt auch die Seitenzahl (weil der Außenwinkel steigt). Wenn die Seitenzahl wächst, wächst auch der Innenwinkel.	1 Punkt	
Deshalb könnte nur $n < 120$ sein, aber nur das regelmäßige Drei-, Vier- und Fünfeck hat einen kleineren Innenwinkel als 120°. Auch diese sind nicht entsprechend, die Aussage der Aufgabe ist also wahr.	1 Punkt	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

Anmerkung: Wenn der Kandidat (mit entsprechender Begründung) alle Seitenzahlen regemäßiger Vielecke aufzählt, dessen Winkel in Grad ganze Zahlen sind, und anhand dieser richtig feststellt, dass es kein entsprechendes Vieleck gibt, bekommt er die volle Punktzahl. In der Lösung von 7.c ist die Tabelle zu finden, die die möglichen Fälle enthält.

7. c)		
Ein Innenwinkel des n-seitigen ($n \geq 3$) regelmäßigen Vielecks ist in Grad gemessen: $\frac{(n-2)\cdot 180}{n}$, und das ist gleich der positiven ganzen Zahl k.	1 Punkt*	*Wenn ein Innenwinkel des n-*seitigen regelmäßigen Vielecks in Grad gemessen k ist ($k \in \mathbf{N}^+$), *dann ist ein Außenwinkel* $180 - k$.
Also gilt: $nk = n \cdot 180 - 360$,	1 Punkt*	*Die Summe der Außenwinkel ist* 360°, *so ist* $\frac{360}{n} = 180 - k$.
woraus: $k = 180 - \frac{360}{n}$.	1 Punkt*	
Da $n \geq 3$ ist, deshalb entsprechen alle positiven Teiler von 360, die größer als 2 sind (weil in diesen Fällen bekommt man für k eine kleinere ganze Zahl als 180).	1 Punkt*	*Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung auskommt.*
Die Teilerpaare von 360 sind: (1; 360), (2; 180), (3; 120), (4; 90), (5; 72), (6; 60), (8; 45), (9; 40), (10; 36), (12; 30), (15; 24), (18; 20).	2 Punkte**	*Da* $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ *ist, deshalb ist die Anzahl der positiven Teiler von* 360 $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.
360 hat 24 positive Teiler.	1 Punkt	
(Unter den Teiler sind die 1 und 2 nicht entsprechend, deshalb) kann man den Wert von n auf 22 Weisen wählen.	1 Punkt	
Insgesamt:	**8 Punkte**	

Anmerkungen:

1. Die folgende Tabelle enthält die möglichen Werte von n und die dazugehörenden k Werte.

n	k (Grad)	n	k (Grad)	n	k (Grad)	n	k (Grad)	n	k (Grad)
3	60	9	140	20	162	40	171	90	176
4	90	10	144	24	165	45	172	120	177
5	108	12	150	30	168	60	174	180	178
6	120	15	156	36	170	72	175	360	179
8	135	18	160						

*2. Wenn der Prüfling höchstens 9 Teilerpaare findet, bekommt er von den mit ** markierten 2 Punkte 0, wenn er 10 oder 11 Teilerpaare findet, bekommt er 1 Punkt.*

*3. Die mit * markierten 4 Punkte kann er auch für den folgenden Gedankengang bekommen:*

Ein Innenwinkel eines regelmäßigen Vielecks ist in Grad gemessen genau dann eine ganze Zahl, wenn das auch für die Außenwinkel wahr ist. Untersuche man deshalb einen Außenwinkel des Vielecks.	1 Punkt	
Ein Außenwinkel des n-seitigen ($n \geq 3$) regelmäßigen Vielecks ist $\frac{360}{n}$ Grad groß,	1 Punkt	
ein Innenwinkel ist ganz, wenn der Wert $\frac{360}{n}$ (kleiner als 180) eine ganze Zahl ist.	1 Punkt	
Da $n \geq 3$ ist, deshalb entsprechen alle positiven Teiler von 360, die größer als 2 sind.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung auskommt.*

8. a) **erste Lösung**		
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälligerweise ausgewählter Bürger nicht infiziert ist, ist 0,998.	1 Punkt	
P(unter 80 Menschen gibt es mindestens 1 infizierten) = 1 – P(niemand ist infiziert) =	1 Punkt	
$= 1-0{,}998^{80} \approx$	1 Punkt	
$\approx 0{,}15$.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist nicht zu geben, wenn der Kandidat nicht oder falsch rundet.*
Insgesamt:	**4 Punkte**	

8. a) **zweite Lösung**		
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälligerweise ausgewählter Bürger nicht infiziert ist, ist 0,998.	1 Punkt	
P(1 infizierter) = $\binom{80}{1}\cdot 0{,}002\cdot 0{,}998^{79} \approx 0{,}1366$. Ähnlich: P(2 infizierte) ≈ 0,0108, P(3 infizierte) ≈ 0,0006.	1 Punkt	
Da P(4 infizierte) ≈ 0,00002 ist (und die weiteren Wahrscheinlichkeiten schnell fallen), sind die weiteren Glieder der Summe (bei der erwünschten Genauigkeit) zu vernachlässigen.	1 Punkt	
So ist P(unter 80 Menschen gibt es mindestens 1 infizierten) ≈ 0,1366 + 0,0108 + 0,0006 ≈ 0,15.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist nicht zu geben, wenn der Kandidat nicht oder falsch rundet.*
Insgesamt:	**4 Punkte**	

8. b)		
Der Anteil der Infizierten wächst jeden Tag auf das 1,05-fache des Anteils des vorigen Tages.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung auskommt.*
Bezeichne man die Anzahl der gefragten Tage mit x, dann ist $0{,}2\cdot 1{,}05^{x}=1$.	1 Punkt	
$1{,}05^{x}=5$	1 Punkt	
$x=\dfrac{\lg 5}{\lg 1{,}05}\approx 32{,}99$	1 Punkt	$x=\log_{1{,}05}5$
(Da die Anzahl der Infizierten wächst, deshalb) erreicht die Anzahl der Infizierten 1% der Bevölkerung in etwa 33 Tagen.	1 Punkt	
Insgesamt:	**5 Punkte**	

Anmerkung: Der Kandidat kann die volle Punktzahl erhalten, wenn er statt Gleichungen mit Ungleichungen richtig arbeitet.

8. c) **erste Lösung**		
Wenn die Anzahl der Bewohner n ist,	1 Punkt	*Von Anfangsbevölkerungszahl hängt die Antwort auf die Frage der Aufgabe nicht ab. Sie ist z.B.:* $n = 1\,000\,000$.
ist die Anzahl der Infizierten $0{,}002n$, die der nicht Infizierten $0{,}998n$.	1 Punkt	*Dann gibt es* 2000 *Infizierte,* 998 000 *nicht infizierte.*
Wenn man alle Bewohner testen würde, würden die Testergebnisse unter den $0{,}002n$ Infizierten $0{,}002n \cdot 0{,}99 = 0{,}00198n$ positiv, $0{,}00002n$ negativ,	1 Punkt	*Unter den* 2000 *Infizierten gibt es* $(2000 \cdot 0{,}99 =)$ 1980 *positive,* 20 *negative Testergebnisse,*
unter der $0{,}998n$ nicht Infizierten $0{,}998n \cdot 0{,}04 = 0{,}03992n$ positiv, $0{,}95808n$ negativ sein.	1 Punkt	*unter den* 998 000 *nicht infizierten gibt es* $(998\,000 \cdot 0{,}04 =)$ 39 920 *positive,* 958 080 *negative Testergebnisse.*
Die Anzahl der positiven Testergebnisse $0{,}00198n + 0{,}03992n = 0{,}0419n$, darunter $0{,}00198n$ Infizierte.	1 Punkt	*Die Anzahl der positiven Tests ist* 39 920 + 1980 = = 41 900*, darunter sind* 1980 *infiziert.*
$\frac{0{,}00198n}{0{,}0419n} \approx 0{,}0473$,	1 Punkt	$\frac{1980}{41\,900} \approx 0{,}0473$
D.h. die Wahrscheinlichkeit der Infektion wäre unter den positiven Testergebnissen wirklich kleiner als 0,05.	1 Punkt	
Insgesamt:	**7 Punkte**	

8. c) **zweite Lösung**		
Bezeichne man mit A das Ereignis, dass der Test positiv ist, mit B das Ereignis, dass die untersuchte Person infiziert ist. Zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit $P(B\|A)$.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung auskommt.*
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Test mit einer infizierten Person durchgeführt wurde und er positiv wurde, ist $P(AB) = 0{,}002 \cdot 0{,}99$ $(= 0{,}00198)$.	1 Punkt	
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Test mit einer nicht infizierten Person durchgeführt wurde und er positiv wurde, ist $P(A\overline{B}) = 0{,}998 \cdot 0{,}04$ $(= 0{,}03992)$.	1 Punkt	
(AB und $A\overline{B}$ sind einander ausschließende Wahrscheinlichkeiten,) die Wahrscheinlichkeit deshalb, dass eine - in der Stadt wohnende, zufällig ausgewählte Person - ein positives Testergebnis bekommt, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der zwei Ereignisse: $P(A) = 0{,}998 \cdot 0{,}04 + 0{,}002 \cdot 0{,}99$ $(= 0{,}0419)$.	1 Punkt	
$P(B\|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} =$	1 Punkt	
$= \frac{0{,}002 \cdot 0{,}99}{0{,}002 \cdot 0{,}99 + 0{,}998 \cdot 0{,}04} \approx 0{,}0473$,	1 Punkt	$\frac{0{,}00198}{0{,}0419} \approx 0{,}0473$
D.h. die Wahrscheinlichkeit der Infektion wäre unter den positiven Testergebnissen wirklich kleiner als 0,05.	1 Punkt	
Insgesamt:	**7 Punkte**	

9. a) **erste Lösung**		
Wenn die Masse eines Teiles x Tonnen ist ($0 < x < 350$), dann ist die Masse des anderen $350 - x$, die Lieferungskosten sind dann $k(x) = \frac{x^2}{10} + 205 + \frac{(350-x)^2}{10} + 205$ (Euro).	1 Punkt	
Nach dem Klammerauflösen und Zusammenfassen: $k(x) = \frac{1}{5}(x^2 - 350x + 63\ 300)$.	1 Punkt	$k'(x) = \frac{1}{5}(2x - 350)$
Wegen $k(x) = \frac{1}{5}(x-175)^2 + 6535$ (oder $k'(175) = 0$) ist der Funktionswert der Funktion k genau dann minimal, wenn $x = 175$ ist, die Aussage ist so wahr.	2 Punkte	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

9. a) **zweite Lösung**		
Wenn die Masse eines Teiles $175 - x$ Tonnen ist ($0 \le x < 175$), dann ist die Masse des anderen $175 + x$, die Lieferungskosten sind dann $k(x) = \frac{(175-x)^2}{10} + 205 + \frac{(175+x)^2}{10} + 205$ (Euro).	1 Punkt	
Nach dem Klammerauflösen und Zusammenfassen: $k(x) = \frac{1}{5}x^2 + 6535$.	1 Punkt	
Das ist genau dann minimal, wenn $x = 0$ ist, die Aussage ist so wahr.	2 Punkte	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

9. a) **dritte Lösung**		
Wenn die Masse eines Teiles x Tonnen ist ($0 < x < 350$), die Lieferungskosten sind dann $k(x) = \frac{x^2}{10} + 205 + \frac{(350-x)^2}{10} + 205$ (Euro).	1 Punkt	
Das ist genau dann minimal, wenn die Summe $x^2 + (350-x)^2$ minimal ist.	1 Punkt	
Wegen der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel: $x^2 + (350-x)^2 \ge 2 \cdot \frac{(x+350-x)^2}{4} = \frac{350^2}{2}$.	1 Punkt	
Die Gleichung besteht genau dann, wenn $x = 350 - x$, die Aussage ist so wahr.	1 Punkt	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

9. b)		
Der zu bezahlende Betrag für die Lieferung ist: $n \cdot \frac{350^2}{10n^2} + 205n$.	2 Punkte	*Für beide Glieder der Summe ist je 1 Punkt zu geben.*
Nach dem Quadrieren und der Division bekommt man, dass das wirklich gleich $\frac{12\,250}{n} + 205n$ ist.	1 Punkt	
Insgesamt:	**3 Punkte**	

9. c) erste Lösung		
Die Gesamtkosten der Lieferung und der Verteilung sind: $\frac{12\,250}{n}+205n+400(n-1)$ $(n\in\mathbf{N}^+)$.	1 Punkt	
(Man untersucht die Funktion *f* in der Menge der positiven reellen Zahlen, wenn) $f(x)=\frac{12\,250}{x}+605x-400$.	1 Punkt	
f ist ableitbar, und $f'(x)=-\frac{12\,250}{x^2}+605$.	1 Punkt	
(*f* kann eine Extremstelle haben, wo f' eine Nullstelle hat:) $-\frac{12\,250}{x^2}+605=0$.	1 Punkt	
(Da $x > 0$ ist, deshalb ist) $x=\sqrt{\frac{12\,250}{605}}$ (≈ 4,4998).	1 Punkt	
Da $f''(x)=\frac{24\,500}{x^3}$ $(x\in\mathbf{R}^+)$ überall positiv ist, deshalb ist $\sqrt{\frac{12\,250}{605}}$ die absolute Minimumstelle von *f*.	1 Punkt	*Auch andere richtigen Begründungen sind akzeptabel, z.B. der Bezug auf den Vorzeichenwechsel der Ableitungsfunktion.*
Die erhaltene Minimumstelle ist jedoch keine ganze Zahl, deshalb gibt es (wegen des Monotonieverhaltens der Funktion *f*) zwei Möglichkeiten: in 4 oder 5 Teile muss die Ware geteilt werden.	1 Punkt	*Im*]0; 4,4997[*fällt f streng monoton, im*]4,4998; +∞[*steigt f streng monoton.*
Wenn $n = 4$ ist, sind die Kosten 5082,5 Euro, wenn $n = 5$ ist, dann 5075 Euro.	1 Punkt	
In 5 gleichgroße Teile zerlegt ist die Ablieferung der 350 Tonnen Ware am billigsten.	1 Punkt	
Insgesamt:	**9 Punkte**	

9. c) zweite Lösung		
$f(1) = 12\,455$, $f(2) = 6935$, $f(3) \approx 5498$, $f(4) = 5082{,}5$, $f(5) = 5075$, $f(6) \approx 5272$.	2 Punkte	
Man vermutet, dass die kleinsten Kosten entstehen, wenn man die Ware in 5 Teile zerlegt.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung auskommt.*
Man untersucht (in der Menge der reellen Zahlen) die $\frac{12\,250}{n}+605n-400<5075$ Ungleichung,	2 Punkte	
die (wegen $n > 0$) äquivalent mit der Ungleichung $121n^2-1095n+2450<0$ ist.	1 Punkt	
Die Lösungsmenge ist $\left]\frac{490}{121};5\right[$,	1 Punkt	
aber in dieser Menge gibt es keine ganze Zahl.	1 Punkt	
In 5 gleichgroße Teile zerlegt ist die Ablieferung der 350 Tonnen Ware am billigsten.	1 Punkt	
Insgesamt:	**9 Punkte**	