Azonosító jel:

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2022. október 18.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

2022. október 18. 8:00

Időtartam: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.
4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. Adott a $C(-6; -2)$ és a $P(-3; 2)$ pont.

a) Írja fel a C középpontú, P ponton átmenő k kör egyenletét!

b) Írja fel a k kör P pontra illeszkedő érintőegyenesének egyenletét!

A C és P pontokon áthaladó egyenes és a két koordinátatengely egy derékszögű háromszöget határoz meg.

c) Határozza meg a háromszög köré írható kör sugarának hosszát!

a)	2 pont	
b)	3 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	11 pont	

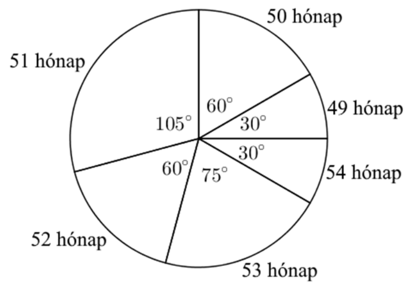
2. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sin^2 x = 3\cos^2 x$

b) $\log_3(x+8) + \log_3(x-2) - \log_3(x+4) = 1$

a)	6 pont	
b)	8 pont	
Ö.:	14 pont	

3. Egy napelemes akkumulátortöltőket gyártó cég termékei közül 24 darabnak az élettartamát vizsgálták. A vizsgálat végeredményét (a 24 darabra vonatkozóan) az alábbi kördiagram szemlélteti.



a) Töltse ki az alábbi táblázatot, és határozza meg a 24 darab töltő élettartamának átlagát és szórását!

élettartam (hónap)						
darabszám						

A részletesebb vizsgálatok szerint a cég által gyártott töltők 90 százaléka legalább 50 hónap élettartamú (ezt tekinthetjük úgy, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott töltő 0,9 valószínűséggel legalább 50 hónap élettartamú).

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy szakboltba kiszállított 20 darab töltő között legfeljebb kettő olyan található, amelynek az élettartama 50 hónapnál kevesebb?

Ismert az is, hogy 0,75 annak a valószínűsége, hogy öt darab véletlenszerűen kiválasztott töltő mindegyikének élettartama 55 hónapnál kevesebb.

c) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy darab véletlenszerűen kiválasztott töltő élettartama legalább 55 hónap?

a)	5 pont	
b)	5 pont	
c)	3 pont	
Ö.:	13 pont	

4. Adott az $f(x) = \sin x$ és a $g(x) = \left(\frac{2x}{\pi}\right)^2$ függvény ($x \in \mathbf{R}$).

a) Igazolja, hogy mindkét függvény grafikonja áthalad az origón és a $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ ponton!

b) Határozza meg a két függvény grafikonja által közbezárt síkidom területét, ha $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$!

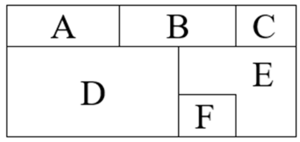
Adott az $a_n = \frac{2 + 2\pi n}{n}$ sorozat ($n \in \mathbf{N}^+$).

c) Igazolja, hogy ez a sorozat szigorúan monoton csökkenő és korlátos, és adja meg a sorozat határértékét!

a)	3 pont	
b)	5 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	13 pont	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!



5. Egy téglalapot hat tartományra osztottak fel az ábrán látható módon. Az A, B, C, D, E, F tartományokat úgy kell kiszínezni, hogy azonos színű tartományok ne érintkezzenek egymással. A színezéshez a piros, kék, zöld és sárga színek használhatók. (Mindegyik tartományt ki kell színezni a megadott színek egyikével, de nem kötelező mind a négy színt felhasználni.)

a) Hányféleképpen színezhető ki a téglalap úgy, hogy az A és C tartományok színe **különböző** legyen?

Az A, B, C, D, E és F nemnegatív számokról a következőket tudjuk:
(1) $A = 6$ és $D = 8$;
(2) B számtani közepe A-nak és C-nek;
(3) F mértani közepe D-nek és E-nek;
(4) F 1-gyel nagyobb B-nél;
(5) E 2-vel nagyobb C-nél.

b) Határozza meg az ismeretlen számok értékét!

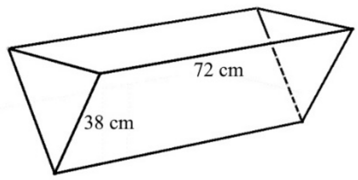
a)	7 pont	
b)	9 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

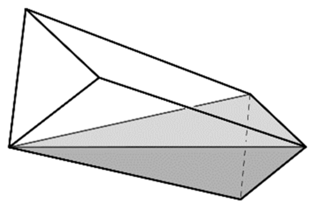
6. Egy ingatlanhirdetésben sík területen fekvő legelőt kínálnak eladásra. A legelő alakja konvex négyszög, ennek csúcsait jelölje A, B, C és D. A négyszög három oldala $AB = 126$ m, $BC = 65$ m, $CD = 80$ m, két szöge $ABC\sphericalangle = 122{,}5°$ és $ADC\sphericalangle = 90°$.
A legelőt 0,9 hektár területűnek hirdeti az eladó.

a) Hány százalékkal nagyobb a legelő valódi területe a meghirdetettnél?
(1 ha = 10 000 m^2)

Egy itatóvályú alakja háromszög alapú egyenes hasáb. Vízszintes helyzetében a vályú felül nyitott, a hasábnak ez a lapja párhuzamos a vízszintes talaj síkjával, a háromszög alakú lapok pedig a talaj síkjára merőlegesek (ld. az ábrát). A szabályos háromszög alakú lemezek oldalai 38 cm hosszúak, a két téglalap alakú oldallap pedig 38 cm × 72 cm-es.



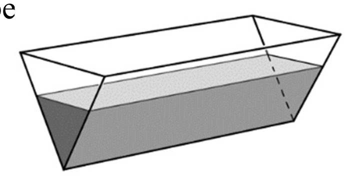
A vízszintes helyzetű vályú kezdetben tele van vízzel. A vályú egyik végét megemeljük, ezért a víz egy része kifolyik belőle. A vályúban ekkor a vízfelszín a bal oldali szabályos háromszög alsó csúcsától a jobb oldali szabályos háromszög felső éléig ér, ahogyan az ábra mutatja.



b) Igazolja, hogy ekkor a vályúban (egészre kerekítve) 15 liter víz van!

A vályút ezután visszafektetjük eredeti, vízszintes helyzetébe

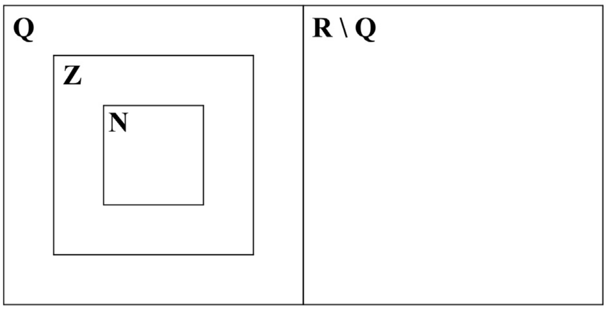
c) Hány cm magasan áll a víz a vályúban ekkor?



a)	6 pont	
b)	5 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

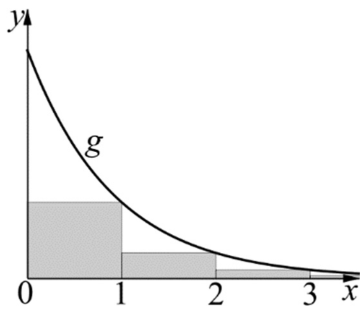
7. **a)** Az f függvény hozzárendelési szabálya $f(x) = 3^{-x}$ ($x \in \mathbf{R}$). Helyezze el az alábbi halmazábra megfelelő részeibe az $f(-2)$, $f(0{,}5)$ és $f(5)$ függvényértékeket!



Egy ötpontú egyszerű gráf A, B, C, D, E pontjaihoz rendre a 3^{-2}, 3^{-7}, 3^{-12}, $1-\sqrt{2}$ és $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ számokat írtuk. A gráfban két pont akkor és csak akkor van éllel összekötve, ha a két ponthoz írt számok **összege** racionális szám.

b) Hány éle van ennek az ötpontú gráfnak?

A koordinátatengelyek és a $g(x) = 3^{-x}$ ($x \geq 0$) függvény grafikonja által határolt tartományba olyan egymáshoz csatlakozó téglalapokat írunk, amelyek egyik oldala az x-tengelyen van és egységnyi hosszúságú, egyik csúcsa pedig a g függvény grafikonjára illeszkedik.
Az első beírt téglalap egyik csúcsa az origó, ezzel szemközti csúcsa pedig az $(1;\ g(1))$ pont. A további téglalapok egy-egy csúcsa rendre $(2;\ g(2))$, $(3;\ g(3))$, és így tovább, az ábra szerint (az ábra nem méretarányos).



Legyen n az a legnagyobb pozitív egész szám, amelyre $g(n) - g(n+1) > 10^{-6}$ teljesül.

c) Számítsa ki az első n téglalap területének összegét!

a)	3 pont	
b)	5 pont	
c)	8 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

8. Egy téglatest egyik éle 4 dm, egy másik éle 2 dm hosszú. A téglatest térfogata 72 dm^3.

a) Határozza meg a téglatest felszínét!

Egy téglatest térfogata 72 dm^3. A téglatest egyik éle kétszer olyan hosszú, mint egy másik éle.

b) Határozza meg az ilyen tulajdonságú téglatestek közül a minimális felszínű téglatest éleinek hosszát!

c) Hányféleképpen választhatunk ki egy téglatest csúcsai közül hármat úgy, hogy a kiválasztott három csúcs által meghatározott sík ne tartalmazza a téglatest egyetlen további csúcsát sem?

a)	2 pont	
b)	8 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

9. Egy jótékonysági rendezvényen sorsjegyeket árulnak. 5 kék és 3 zöld sorsjegy 6700 Ft-ba, 3 kék és 2 zöld sorsjegy 4200 Ft-ba kerül.

a) Mennyibe kerül külön-külön egy kék, illetve egy zöld sorsjegy?

A sorsjegyek 40%-a kék, 60%-a zöld. A különböző színű sorsjegyekhez tartozó nyeremények arányát mutatja a táblázat (például az **összes kék** sorsjegynek a 35%-a tárgynyereményt nyer).

	kék	**zöld**
tárgynyereményt nyer	35%	40%
1000 Ft-os könyvutalványt nyer	20%	30%
5000 Ft-os könyvutalványt nyer	5%	–
nem nyer	40%	30%

Véletlenszerűen kiválasztunk egy sorsjegyet. Legyen az A esemény az, hogy ez a sorsjegy tárgynyereményt nyer, a B esemény pedig az, hogy ez a sorsjegy kék.

b) Igazolja, hogy $P(A) = 0{,}38$.
Számítsa ki a $P(B|A)$ feltételes valószínűséget!
Függetlenek-e az A és B események?

c) Határozza meg az egy kék sorsjegyre eső nyeremény várható értékét, ha a tárgynyereményt 500 Ft-os értéken vesszük figyelembe!

a)	5 pont	
b)	8 pont	
c)	3 pont	
Ö.:	16 pont	

	a feladat sorszáma	pontszám maximális	pontszám elért	pontszám maximális	pontszám elért
I. rész	1.	11		**51**	
	2.	14			
	3.	13			
	4.	13			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli vizsgarész pontszáma				**115**	

dátum — javító tanár

	pontszáma **egész számra** kerekítve: elért	pontszáma **egész számra** kerekítve: programba beírt
I. rész		
II. rész		

dátum — dátum

javító tanár — jegyző