

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

MATEMATIKA NÉMET NYELVEN

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

2023. október 17. 8:00

Időtartam: 300 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

OKTATÁSI HIVATAL

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Wichtige Hinweise

1. Es steht Ihnen eine Arbeitszeit von 300 Minuten zur Verfügung, nach dem Ablauf der Zeit müssen Sie die Arbeit beenden.
2. Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist beliebig.
3. Im Teil II müssen Sie nur vier von den fünf vorgegebenen Aufgaben lösen. **Schreiben Sie am Ende Ihrer Arbeit die Nummer der nicht gewählten Aufgabe in das Kästchen!** Wenn es für die Korrektoren *nicht eindeutig erkennbar ist*, welche Aufgabe Sie nicht wählen wollten, wird die letzte der vorgegebenen Aufgaben nicht bewertet.

--

4. Zur Lösung der Aufgaben sind Taschenrechner, die für die Speicherung und Darstellung von Texten nicht geeignet sind, und beliebige Tafelwerke/Formelsammlungen zugelassen. Weitere elektronische, gedruckte oder schriftliche Hilfsmittel sind nicht erlaubt!
5. **Beschreiben Sie den Lösungsweg immer ausführlich, denn die meisten für die Aufgabe bestimmten Punkte werden dafür vergeben!**
6. **Achten Sie darauf, dass die wichtigsten Berechnungen nachvollziehbar sind!**
7. Während der Aufgabenlösung kann man **den Gebrauch des Taschenrechners – ohne weitere mathematische Begründung – bei den folgenden Rechnungen akzeptieren:** Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzieren, Wurzelziehen, Berechnen von $n!$, $\binom{n}{k}$, für die Ersetzung der Tabellen im Tafelwerk ($\sin$, $\cos$, $\tan$, $\log$ und ihre Umkehrfunktionen), zur Angabe des Näherungswertes von den Zahlen π und e , zur Bestimmung der Lösungen einer auf Null reduzierten quadratischen Gleichung. Weiterhin darf man den Taschenrechner ohne mathematischen Begründung verwenden, wenn der Durchschnitt und die Streuung berechnet wird, es sei denn der Text der Aufgabe verlangt eindeutig die Nebenrechnungen dazu. **In anderen Fällen gelten die mit Taschenrechner durchgeführten Rechnungen als nicht begründete Schritte, für die keine Punkte verteilt werden können.**
8. Sätze, die Sie in der Schule mit Namen gelernt haben (z. B. Satz von Pythagoras, Höhensatz), müssen bei der Lösung der Aufgaben nicht formuliert werden. Es reicht, wenn Sie den Satz benennen und kurz begründen, warum der Satz hier verwendbar ist. Der Bezug auf weitere Sätze wird nur dann vollständig akzeptiert, wenn Sie den Satz mit allen Bedingungen genau formulieren (ohne Beweis) und seine Anwendung im konkreten Fall begründen.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

9. Die Endergebnisse der Aufgaben (die Antwort auf die gestellte Frage), müssen Sie in einem Antwortsatz formulieren!
10. Schreiben sie mit Kugelschreiber oder mit Tinte, die Abbildungen können auch mit Bleistift gezeichnet werden! Außer den Abbildungen werden die mit Bleistift geschriebenen Teile nicht bewertet. Wenn Sie eine Lösung oder einen Teil davon durchstreichen, kann dieses nicht bewertet werden.
11. Bei jeder Aufgabe kann nur ein Lösungsweg bewertet werden. Bei mehreren Lösungsversuchen **markieren Sie bitte eindeutig**, welchen Sie für richtig halten!
12. Bitte, **beschreiben Sie die grauen Kästchen nicht!**

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

I.

1. a) Lösen Sie die Gleichung, wenn x und y **positive ganze** Zahlen sind!

$$\frac{x}{8} = \frac{1,5}{y}$$

- b) Lösen Sie die Gleichung in der Menge der reellen Zahlen!

$$3 \cdot 9^x - 3^{x+3} = 3^x - 9$$

a)	4 Punkte	
b)	7 Punkte	
I.:	11 Punkte	

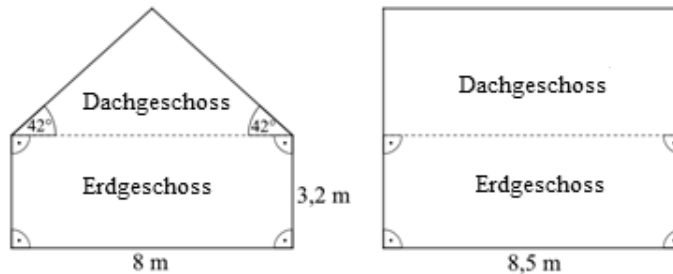
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2. Das Erdgeschoss eines Einfamilienhauses ist quaderförmig, und dazu passt ein Dachgeschoss mit der Form eines geraden dreiseitigen Prismas. Einige Angaben des Hauses sind in Vorder- und Seitenansicht in den folgenden Abbildungen dargestellt. (Die Dicke der Wände werden nicht berücksichtigt.)



ein Schrägbild

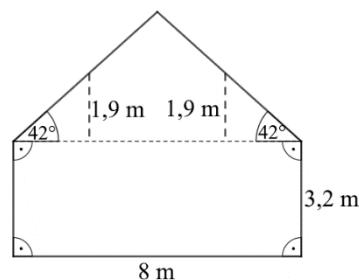


Beantworten Sie die folgenden Fragen durch Berechnungen anhand der Maßangaben der Abbildungen!

- Die gesamte Dachfläche wird mit Ziegeln bedeckt. Wie groß ist diese Fläche?
Geben Sie Ihre Antwort in m^2 , auf eine ganze Zahl gerundet an!
- Wie viel Kubikmeter ist das Volumen des ganzen Hauses (das Erdgeschoss und das Dachgeschoss zusammen)?

Nur derjenige Teil der Grundfläche des ausgebauten Dachgeschosses zählt als Wohnfläche, der eine Deckenhöhe von mindestens 1,9 Metern hat.

- Wie viel Quadratmeter ist die ganze Wohnfläche des Hauses (die Wohnfläche im Erdgeschoss und im Dachgeschoss zusammen)?



a)	4 Punkte	
b)	4 Punkte	
c)	4 Punkte	
I.:	12 Punkte	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 3.** Der Trainer von Tomi bewertet die Leistung der Spieler auf einer Skala von 1-10 (jeweils mit einer ganzen Zahl) nach jedem Fußballspiel. In den ersten sieben Spielen dieser Saison bekam Tomi folgende Bewertungen: 6, 8, 6, 2, 8, 8, 6.

- a)** Berechnen Sie den Durchschnitt und die Streuung/Standardabweichung der ersten sieben Bewertungen!

Nach den nächsten drei Spielen von Tomi hat es sich herausgestellt, dass die bisherigen zehn Bewertungen folgende Eigenschaften haben: ihr Durchschnitt ist 6,3, ihre Spannweite ist 8 und sie haben einen einzigen Modus/Modalwert.

- b)** Bestimmen Sie, welche Bewertungen Tomi in diesen drei Spielen bekam!

Nachdem er eine Bewertung für das 11. Spiel bekommen hat, ist die durchschnittliche Bewertung von Tomi um ein Zehntel dieser Bewertung gesunken, im Vergleich zu seinem Durchschnitt von 6,3 für seine vorherigen zehn Spiele.

- c)** Welche Bewertung bekam Tomi für das 11. Spiel?

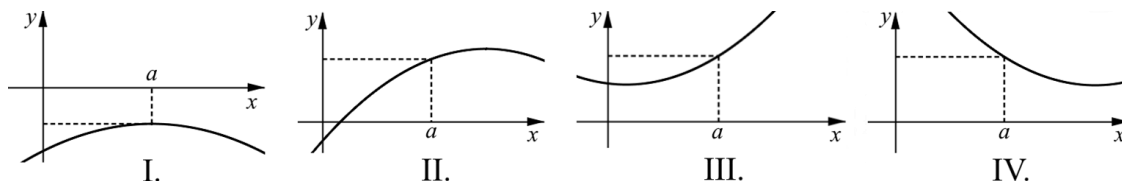
a)	3 Punkte	
b)	7 Punkte	
c)	3 Punkte	
I.:	13 Punkte	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

4. Gegeben ist die quadratische Funktion f , die in der Menge der reellen Zahlen definiert wurde. Es ist bekannt, dass für eine gegebene Stelle $a \in \mathbf{R}$ alle der folgenden Bedingungen erfüllt werden: $f(a) > 0$, $f'(a) > 0$ und $f''(a) > 0$.

- a) Die folgenden Abbildungen zeigen die Graphen von vier quadratischen Funktionen. Anhand dieser füllen Sie die leeren Zellen der Tabelle aus, ob die entsprechende Aussage *richtig* oder *falsch* ist! Anschließend entscheiden Sie, welche der vier Graphen die Funktion f darstellen könnte! (Sie müssen hier Ihre Antworten nicht begründen.)



der Graph der-Funktion	an der Stelle a ist der Funktionswert positiv	an der Stelle a ist der Wert der ersten Ableitung positiv	an der Stelle a ist der Wert der zweiten Ableitung positiv
I.		<i>falsch</i>	
II.			
III.			
IV.			

Der Graph der Funktion f kann der Graph sein.

- b) Der Wert der quadratischen Funktion g an der Stelle $x \in \mathbf{R}$ wird durch den Zusammenhang $g(x) = px^2 + qx + r$ an ($p, q, r \in \mathbf{R}, p \neq 0$) angegeben. Bestimmen Sie die Werte von p, q und r so, dass die Gleichungen $g(1) = 1$, $g'(1) = 2$ und $g''(1) = 4$ erfüllt werden!

- c) Berechnen Sie den Wert von $\int_{-3}^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \right) dx$!

a)	6 Punkte	
b)	6 Punkte	
c)	3 Punkte	
I.:	15 Punkte	

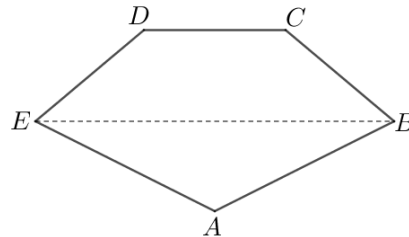
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

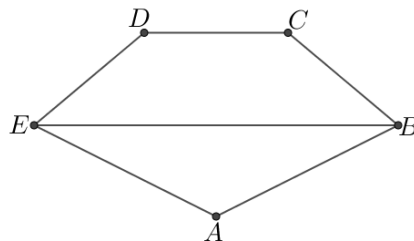
II.

Von den Aufgaben 5-9 müssen Sie vier beliebig ausgewählte Aufgaben lösen. Die Nummer der nicht gewählten Aufgabe schreiben Sie bitte ins leere Kästchen auf der Seite 2!

5. Im konvexen Fünfeck $ABCDE$ ist $AB = AE = 20$ cm und $BC = CD = DE$. Das Viereck $BCDE$ ist ein symmetrisches Trapez, dessen Innenwinkel im Eckpunkt B 40° ist. Der Abstand der Eckpunkt A von der Diagonale EB ist 10 cm.



- a) Bestimmen Sie die Innenwinkel des Fünfecks!
- b) Wie groß ist der Flächeninhalt des Fünfecks?
- c) Auf wie viele Weise kann der dargestellte Graph $ABCDE$ (mit fünf Knoten) durchlaufen werden, wenn jede Kante des Graphen genau einmal durchlaufen werden muss?
(Der Ausgangspunkt des Durchlaufs ist einer der Knoten des Graphen; wenn man an einem Knoten angekommen ist, kann man nur entlang einer Kante weitergehen, die ebenfalls von diesem Knoten ausgeht.)



a)	4 Punkte	
b)	8 Punkte	
c)	4 Punkte	
I.:	16 Punkte	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Von den Aufgaben 5-9 müssen Sie vier beliebig ausgewählte Aufgaben lösen. Die Nummer der nicht gewählten Aufgabe schreiben Sie bitte ins leere Kästchen auf der Seite 2!

6. Eine Gesellschaft aus sechs Freunden, Attila, Boróka, Csaba, Dóra, Emil und Fanni bildet drei Gruppen. Die drei Gruppen bestehen jeweils aus 2 Mitgliedern, und alle sechs Personen gehören zu genau einem Team.
- a) Beweisen Sie, dass es 15 verschiedene Möglichkeiten gibt, die drei Teams zu bilden! (Zwei Möglichkeiten sind unterschiedlich, wenn es ein Teammitglied gibt, das in einem Fall einen anderen Mitspieler hat als im anderen Fall.)
- b) Wenn die drei Teams zufällig (zum Beispiel durch Los) gebildet werden, dann wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in jedem der drei Teams ein Junge und ein Mädchen ist?

Endlich kamen Attila mit Boróka, Csaba mit Dóra, Emil mit Fanni in ein Team. Die Mitglieder der drei Teams spielen Tischtennis-Einzelspiele. Beide Mitglieder der drei Mannschaften spielen einmal gegen beide Mitglieder der anderen beiden Mannschaften. (Die Spieler derselben Mannschaft, spielen nicht gegeneinander.) Die Spiele wurden nacheinander durchgeführt. Attila bemerkte nach einigen Spielen, dass die anderen fünf Spieler bis jetzt alle eine unterschiedliche Anzahl von Spielen gespielt haben.

- c) Wie viele Spiele spielte Boróka bis jetzt?

a)	5 Punkte	
b)	4 Punkte	
c)	7 Punkte	
I.:	16 Punkte	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

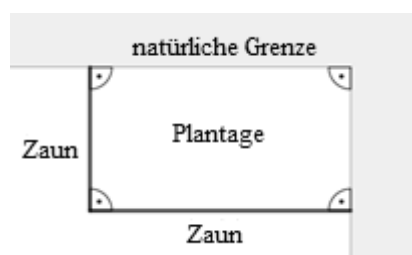
Von den Aufgaben 5-9 müssen Sie vier beliebig ausgewählte Aufgaben lösen. Die Nummer der nicht gewählten Aufgabe schreiben Sie bitte ins leere Kästchen auf der Seite 2!

7. Zur Schätzung der möglichen Höhe eines beobachteten Fichtenbaumes (in Metern gemessen) wurde die folgende Formel benutzt:

$$h(t) = \frac{30}{1 + 59 \cdot 0,905^t}, \text{ wobei } t \text{ die Anzahl der vergangenen Jahre seit Beginn der Beobachtung ist.}$$

- a) Wie viel Meter hoch war der Baum zu Beginn der Beobachtung?
- b) In wie vielen Jahren nach Beobachtungsbeginn wird der Baum 10 Meter hoch?
- c) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $\{a_n\}$, wenn $a_n = \frac{30}{1 + 59 \cdot 0,905^n}$ ist!

Für besondere Baumpflänzlinge wird ein rechteckiger Bereich eingezäunt. Die zwei benachbarten Seiten des Rechtecks sind mit natürlicher Grenze geschützt, so muss nur entlang der anderen zwei Seiten ein Zaun gebaut werden. Die Baukosten des Zauns sind wegen der Umweltbedingungen an den zwei Seiten unterschiedlich: an der einen Seite ist 5 Tausend Ft/m, an der anderen Seite ist 10 Tausend Ft/m. Für den Bau des Zauns stehen insgesamt 400 Tausend Ft zur Verfügung.



- d) Wie sollen die Längen der zwei Zaunstrecken gewählt werden, damit für die Plantage aus der zur Verfügung stehenden Summe den maximalen Flächenbereich abgezaunt werden kann?

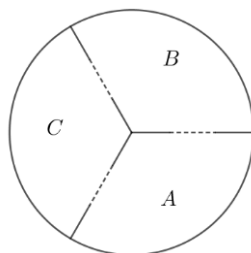
a)	2 Punkte	
b)	5 Punkte	
c)	3 Punkte	
d)	6 Punkte	
I.:	16 Punkte	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Von den Aufgaben 5-9 müssen Sie vier beliebig ausgewählte Aufgaben lösen. Die Nummer der nicht gewählten Aufgabe schreiben Sie bitte ins leere Kästchen auf der Seite 2!

- 8.** In einem Computerspiel wurde ein kreisförmiger Bereich laut der Abbildung in drei Teilbereichen (A , B , C) eingeteilt. Zwischen zwei beliebigen Bereichen gibt es einen Durchgang (er wurde in der Abbildung mit gestrichelter Linie markiert). Jeder Durchgang zwischen den Bereichen unabhängig von den anderen ist mit der Wahrscheinlichkeit p ($0 < p < 1$) geöffnet. Von einem Bereich bis zum anderen kann man nur über einen geöffneten Durchgang (oder über geöffneten Durchgängen) gelangen.



Sei E_0 das Ereignis, dass vom Bereich A nicht in die anderen Bereiche gelangen werden kann.

- a)** Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_0 gleich $1 - 2p + p^2$ ist!
- b)** Wie muss der Wert von p gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_0 höchstens 0,01 ist?

Sei E_1 das Ereignis, dass vom Bereich A in genau einen anderen Bereich gelangen werden kann, E_2 ist das Ereignis, dass vom Bereich A in beide andere Bereiche gelangen werden kann (nicht unbedingt direkt).

- c)** Beweisen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_1 gleich $2p - 4p^2 + 2p^3$ ist, und die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_2 gleich $3p^2 - 2p^3$ ist!
- d)** Bestimmen Sie den Wert von p so, dass die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_1 am möglichst größten ist! Berechnen Sie in diesem Fall auch die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_1 !

a)	3 Punkte	
b)	3 Punkte	
c)	5 Punkte	
d)	5 Punkte	
I.:	16 Punkte	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Von den Aufgaben 5-9 müssen Sie vier beliebig ausgewählte Aufgaben lösen. Die Nummer der nicht gewählten Aufgabe schreiben Sie bitte ins leere Kästchen auf der Seite 2!

- 9.** Aus den Zahlen 2, 4, 6, 8, 10 werden alle möglichen Produkte aus zwei Faktoren gebildet, wobei der erste Faktor kleiner als der zweite Faktor ist. Die so entstehenden Produkte werden addiert.

a) Berechnen Sie diese Summe!

Sei k eine beliebige positive ganze Zahl, die größer als 1 ist. S_k bedeutet die Summe, die mit dem folgenden Verfahren zu bekommen ist:

mit der Verwendung der Zahlen 1, 2, 3, ..., k (die ersten k positive ganze Zahlen) werden die Produkte aus zwei Faktoren auf alle möglichen Weisen gebildet, wobei der erste Faktor kleiner als der zweite Faktor ist, dann werden die Produkte addiert.

b) Beweisen Sie, dass $S_{k+1} = S_k + \frac{k(k+1)^2}{2}$ ist!

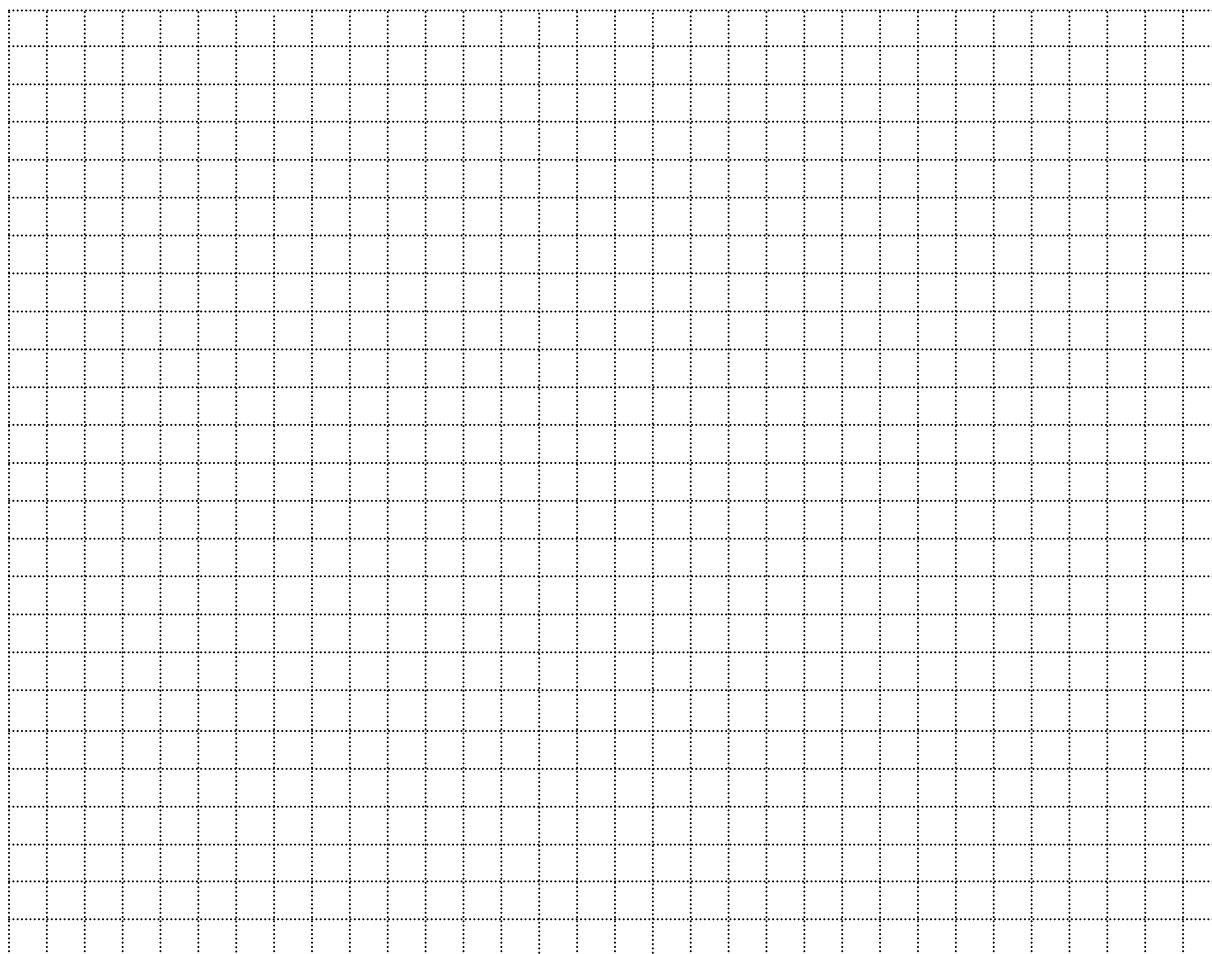
c) Beweisen Sie (mit vollständiger Induktion oder mit einer anderen Methode), dass für alle n ganze Zahlen, die größer als 1 sind, $S_n = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}$ ist!

a)	4 Punkte	
b)	4 Punkte	
c)	8 Punkte	
I.:	16 Punkte	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

	Nummer der Aufgabe	Punktzahl			
		maximale	erreichte	maximale	erreichte
Teil I.	1.	11		51	
	2.	12			
	3.	13			
	4.	15			
Teil II.		16		64	
		16			
		16			
		16			
		← die nicht gewählte Aufgabe			
Punktzahl des schriftlichen Teiles				115	

Datum

Korrektor

	pontoszáma egész számra kerekítve	
	elért	programba beírt
I. rész		
II. rész		

dátum

dátum

javító tanár

jegyző