

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2023. október 17.

MATEMATIKA NÉMET NYELVEN

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI HIVATAL

Wichtige Hinweise

Formvorschriften:

1. Die Arbeit ist mit einem **andersfarbigen Stift**, als der Abiturient ihn benutzt hat, **lesbar** zu korrigieren.
2. In den Kästchen neben den Aufgaben steht zuerst die maximale Punktzahl. Der Korrektor trägt die von ihm gegebene **Punktzahl in das zweite Kästchen** ein.
3. **Bei einwandfreier Lösung** markieren Sie neben der maximalen Punktzahl mit Haken, dass Sie die Gedankeneinheit gesehen haben, und sie als richtig beurteilt haben.
4. Bei fehlerhaften oder mangelhaften Lösungen **markieren** Sie den Fehler und geben Sie bitte auch die **Teilpunkte** für die richtigen Schritte an. Wenn die Korrektur besser nachvollziehbar ist, dann dürfen auch die verlorenen Punkte markiert werden. Kein Teil darf in der Arbeit bleiben, wo nach der Korrektur nicht eindeutig ist, ob er richtig, falsch oder überflüssig ist.
5. Während der Korrektur **benutzen Sie die folgenden Bezeichnungen**:
 - richtiger Schritt: *Haken*
 - theoretischer Fehler: *zweimaliges Unterstreichen*
 - Rechenfehler oder sonstige, nicht theoretischer Fehler: *einmaliges Unterstreichen*
 - mit falschen Ausgangsdaten durchgeführter richtiger Schritt: *gestrichelter oder durchgestrichener Haken*
 - mangelhafte Begründung, mangelhaftes Aufzählen, andere Mängel: *Mangelzeichen*
 - nicht verständlicher Teil: *Fragezeichen und/oder Wellenlinie*
6. Mit **Bleistift** geschriebenen Teile außer Abbildungen dürfen nicht bewertet werden.

Inhaltliche Fragen:

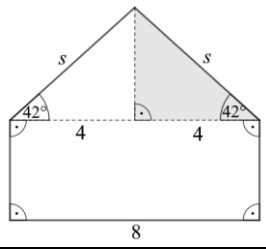
1. Bei einigen Aufgaben sind verschiedene Lösungswege angegeben. Wenn eine von diesen **unterschiedlichen Lösungen** vorkommt, suchen Sie die gleichwertigen Teile und verteilen sie die Punkte entsprechend.
2. Die vorgeschriebenen Punktzahlen lassen sich weiter **zerlegen, es sei denn der Lösungsschlüssel erlaubt das nicht**, dürfen aber nur als ganze Punkte vergeben werden.
3. Wenn der Schüler einen **Rechenfehler** macht oder ungenau wird, bekommt er nur für den Teil keinen Punkt, wo der Fehler lag. Wenn er mit falschem Teilergebnis, aber mit richtigem Gedankengang weiterrechnet, und dadurch das zu lösende Problem sich nicht wesentlich verändert, sind die weiteren Teilpunkte zu gewähren.
4. Begeht der Schüler einen **theoretischen Fehler**, so bekommt er innerhalb einer Gedankeneinheit (diese wird in der Anweisung mit Doppellinie markiert) auch für die formell richtigen mathematischen Schritte keinen Punkt. Wenn der Schüler in einer folgenden Teilaufgabe oder Gedankeneinheit mit diesem falschen Ergebnis als Ausgangswert richtig weiterrechnet, dadurch aber das zu lösende Problem sich nicht wesentlich verändert, bekommt er die maximale Punktzahl für diesen neuen Teil.

5. Wenn in der Anweisung eine **Bemerkung** in Klammern steht, dann kann die Lösung auch ohne diese mit voller Punktzahl bewertet werden.
6. **Ohne die Angabe der Maßeinheit** werden Punkte nur dann abgezogen, wenn die Maßeinheit in der Antwort oder bei der Umwandlung der Maßeinheit fehlt (ohne Klammern).
7. Bei mehreren Lösungen für eine Aufgabe ist **nur die eine zu bewerten, die der Schüler markiert hat**. Während der Korrektur markieren Sie eindeutig, welche Version bewertet wurde, welche nicht.
8. **Zusatzpunkte** (mehr Punkte als die vorgeschriebene maximale Punktzahl für die Aufgabe) sind **nicht zugelassen**.
9. Die Gesamtpunktzahl einer Aufgabe oder Teilaufgabe **darf nicht negativ sein**.
10. Es gibt **keinen Punktabzug** für Berechnungen und Schritte, die zwar falsch sind, aber vom Schüler bei der Lösung der Aufgabe nicht weiterverwendet werden.
11. Während der Aufgabenlösung kann man **den Gebrauch des Taschenrechners – ohne weitere mathematische Begründung – bei den folgenden Rechnungen akzeptieren**: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzieren, Wurzelziehen, Berechnen von $n!$, $\binom{n}{k}$, für die Ersetzung der Tabellen im Tafelwerk ($\sin$, $\cos$, $\tan$, $\log$ und ihre Umkehrfunktionen), zur Angabe des Näherungswertes von den Zahlen π und e , zur Bestimmung der Lösungen einer auf Null reduzierten quadratischen Gleichung. Weiterhin darf man den Taschenrechner ohne mathematischen Begründung verwenden, wenn der Durchschnitt und die Streuung berechnet wird, es sei denn der Text der Aufgabe verlangt eindeutig die Nebenrechnungen dazu. **In anderen Fällen gelten die mit Taschenrechner durchgeführten Rechnungen als nicht begründete Schritte, für die keine Punkte verteilt werden können**.
12. Wenn **Abbildungen** als Beweise verwendet wurden (z.B. das Ablesen der Daten durch Messung), ist dies nicht akzeptabel.
13. Bei der Angabe von **Wahrscheinlichkeiten** (wenn der Text der Aufgabe nichts Anderes sagt) dürfen auch in Prozent angegebene richtige Lösungen akzeptiert werden.
14. Wenn der Text der Aufgabe keine Rundung vorschreibt, dann sind auch Teil- und Endergebnisse akzeptierbar, die vom Lösungsschlüssel abweichen aber **sinnvoll und richtig gerundet wurden**.
15. **Im Teil II sind aus den 5 Aufgaben nur Lösungen von 4 Aufgaben zu bewerten**. Der Abiturient hat die Nummer der Aufgabe, die nicht bewertet werden soll, in das entsprechende Kästchen – vermutlich – eingetragen. Dementsprechend wird die eventuell vorhandene Lösung für diese Aufgabe nicht korrigiert. Wenn die ausgewählte Aufgabe nicht eindeutig feststeht, und die Wahl der Aufgabe in der Arbeit nicht eindeutig zu sehen ist, dann ist die nicht zu bewertende Aufgabe automatisch die letzte Aufgabe der vorgegebenen Aufgabenreihe.

I.

1. a)		
$xy = 12$	1 Punkt	$y = \frac{12}{x}$
(Da x und y positive ganze Zahlen sind, so sind die Lösungen folgende $(x; y)$ Zahlenpaare: (1; 12), (12; 1), (2; 6), (6; 2), (3; 4), (4; 3).	3 Punkte	Bei 4 oder 5 richtigen Lösungen sind 2 Punkte, bei 3 richtigen Lösung 1 Punkt zu geben. Bei der Angabe von falschen Zahlenpaar(en) verliert der Kandidat 1 Punkt.
Insgesamt:		4 Punkte

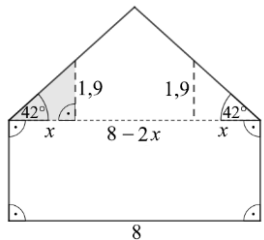
1. b)		
$3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$	2 Punkte	
Eine neue Unbekannte, $a = 3^x$ wird eingeführt: $3a^2 - 28a + 9 = 0$ ($a > 0$).	1 Punkt	
$a = 9$ oder $a = \frac{1}{3}$	1 Punkt	
Im ersten Fall ist $x = 2$,	1 Punkt	
im zweiten Fall $x = -1$.	1 Punkt	
Probe durch Einsetzen oder mit Bezug auf Äquivalenz.	1 Punkt	
Insgesamt:		7 Punkte

2. a)		
Die Breite des Daches entlang einer Seite des Rechtecks sei s . $\cos 42^\circ = \frac{4}{s}$	1 Punkt	
$s \left(= \frac{4}{\cos 42^\circ} \right) \approx 5,4 \text{ m}$	1 Punkt	
Der Flächeninhalt der zwei rechteckigen Dachflächen ist zusammen: $A = 2 \cdot 5,4 \cdot 8,5 \approx$	1 Punkt	
$\approx 92 \text{ m}^2$.	1 Punkt	Dieser Punkt ist nicht zu geben, wenn der Kandidat nicht rundet, oder falsch rundet.
Insgesamt:		4 Punkte

2. b)

Das Volumen des quaderförmigen Erdgeschosses ist $V_f = 8 \cdot 8,5 \cdot 3,2 \approx 218 \text{ m}^3$.	1 Punkt	
Die Höhe des Dachgeschosses ist $h = 4 \cdot \operatorname{tg} 42^\circ \approx 3,6 \text{ m}$.	1 Punkt	$h = \sqrt{5,4^2 - 4^2} = \sqrt{13,16} \approx 3,6 \text{ m}$
Das Volumen des Dachgeschosses mit einer Form eines geraden dreiseitigen Prismas ist $V_t = \frac{8 \cdot 3,6}{2} \cdot 8,5 \approx 122 \text{ m}^3$.	1 Punkt	
Das Volumen des ganzen Hauses ist $V = V_f + V_t = 218 + 122 = 340 \text{ m}^3$.	1 Punkt	
Insgesamt: 4 Punkte		

2. c)

In der Abbildung zeigt x die Breite des Teiles außerhalb der Wohnfläche. $\operatorname{tg} 42^\circ = \frac{1,9}{x}$, so ergibt sich $x \approx 2,1 \text{ m}$.	1 Punkt	
Die Wohnfläche im Dachgeschoss ist $8 - 2 \cdot 2,1 = 3,8 \text{ m}$ breit, so ist die Wohnfläche hier $3,8 \cdot 8,5 \approx 32 \text{ m}^2$.	1 Punkt	<i>Im Dachgeschoss ist die Grundfläche $2 \cdot 2,1 \cdot 8,5 \approx 36 \text{ m}^2$, wo die Deckenhöhe unter 1,9 m ist.</i>
Die Grundfläche des Erdgeschosses ist $8 \cdot 8,5 = 68 \text{ m}^2$.	1 Punkt	<i>Die gesamte Grundfläche des Erdgeschosses und des Dachgeschosses ist $2 \cdot 8 \cdot 8,5 = 136 \text{ m}^2$.</i>
Die ganze Wohnfläche des Hauses ist $68 + 32 = 100 \text{ m}^2$.	1 Punkt	$136 - 36 = 100 \text{ m}^2$
Insgesamt: 4 Punkte		

3. a)

Der Durchschnitt ist $\left(\frac{2 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 8}{7} = \frac{44}{7} \right) \approx 6,29$.	1 Punkt	
Die Streuung ist: $\sqrt{\frac{(-4,29)^2 + 3 \cdot (-0,29)^2 + 3 \cdot 1,71^2}{7}}$ $\approx$	1 Punkt	<i>Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn der Kandidat die Streuung mit dem Taschenrechner richtig berechnet.</i>
$\approx 1,98$.	1 Punkt	
Insgesamt: 3 Punkte		

3. b) erste Lösung		
Die Summe der zehn Bewertungen ist 63 wegen des Durchschnitts, also die Summe der weiteren drei Bewertungen nach den ersten sieben Bewertungen ist $(63 - 44 =) 19$.	1 Punkt	
Wegen der Spannweite (und der Skala von 1-10) hat Tomi entweder die Bewertungen 1 und 9 (aber hat keine 10) oder die Bewertung 10 (aber keine 1).	1 Punkt	<i>Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung hervorkommt.</i>
Fall I.: Wenn unter den zehn Zahlen die Bewertungen 1 und 9 existieren, dann die fehlende zehnte Bewertung ist $(19 - 1 - 9 =) 9$. Das kann aber nicht vorkommen, denn es wären dann zwei Modalwerte (die 6 und 8).	1 Punkt	
Fall II.: Wenn die Bewertung 10 existiert (aber die 1 nicht), dann ist die Summe der fehlenden zwei Zahlen $(19 - 10 =) 9$.	1 Punkt	
Diese zwei Zahlen können die 2 und 7 oder die 4 und 5 nicht sein, denn es wären dann zwei Modalwerte (die 6 und 8).	1 Punkt	
Wenn die fehlenden zwei Zahlen 3 und 6 sind, dann werden alle Bedingungen erfüllt (die 6 ist der einzige Modus).	1 Punkt	
Also die letzten drei Bewertungen (in einer beliebigen Reihenfolge) waren 3, 6 und 10.	1 Punkt	<i>Die zehn Bewertungen in steigender Reihenfolge sind: 2, 3, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 10.</i>
Insgesamt:		7 Punkte

3. b) zweite Lösung		
Die Summe der zehn Bewertungen ist 63 wegen des Durchschnitts, also die Summe der drei weiteren Bewertungen nach den ersten sieben Bewertungen ist $(63 - 44 =) 19$.	1 Punkt	
Der einzige Modus der zehn Bewertungen kann nur 2, 6, oder 8 sein, aber die Summe ist 19, so können die fehlenden drei Bewertungen nicht alle 2 sein.	1 Punkt	<i>Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung hervorkommt.</i>
Fall I. (der Modus ist 8): Die Möglichkeiten sind: $19 = 8 + 1 + 10 = 8 + 2 + 9 = 8 + 3 + 8 = 8 + 4 + 7$.	1 Punkt	
Diese Möglichkeiten erfüllen die Bedingung für die Spannweite nicht (die Spannweite wäre 9, 7, 6, 6).	1 Punkt	
Fall II. (der Modus ist 6): Die Möglichkeiten sind:	1 Punkt	

$19 = 6 + 3 + 10 = 6 + 4 + 9 = 6 + 6 + 7$.		
Wegen der Bedingung für die Spannweite (sie wäre 8, 7, 6) ist von den drei Möglichkeiten nur die erste entsprechend.	1 Punkt	
Also die letzten drei Bewertungen (in einer beliebigen Reihenfolge) waren 3, 6 und 10.	1 Punkt	
Insgesamt:	7 Punkte	

3. c)

Die Bewertung für das 11. Spiel sei x . In diesem Fall: $\frac{63+x}{11} = 6,3 - \frac{x}{10}$.	1 Punkt	
$630 + 10x = 693 - 11x$	1 Punkt	
$x = 3$ (Die Bewertung für das 11. Spiel ist 3.)	1 Punkt	
Insgesamt:	3 Punkte	

Bemerkung: Wenn der Kandidat alle zehn möglichen Fälle untersucht, und aufgrund seiner Untersuchung richtig antwortet, dann bekommt er die volle Punktzahl.

4. a)

der Graph der-Funktion	an der Stelle a ist der Funktionswert positiv	an der Stelle a ist der Wert der ersten Ableitung positiv	an der Stelle a ist der Wert der zweiten Ableitung positiv		
I.	falsch	falsch	falsch	5 Punkte*	
II.	richtig	richtig	falsch		
III.	richtig	richtig	richtig		
IV.	richtig	falsch	richtig		
Der Graph der Funktion f kann Graph III. sein.				1 Punkt	
Insgesamt:				6 Punkte	

Bemerkungen:

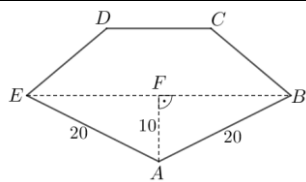
- Die mit * markierten 5 Punkte sind folgenderweise zu geben: für das richtige Ausfüllen der ersten Spalte gibt es 1 Punkt, wenn die zweite und dritte Spalte ohne Fehler ausgefüllt werden, dann sind jeweils 2 Punkte zu geben.
- Die falsch ausgefüllten Zellen vermindern um 1 Punkt die maximale Punktzahl der Spalte, in der die Zelle steht. Die erreichte Punktzahl kann nicht kleiner als Null sein.

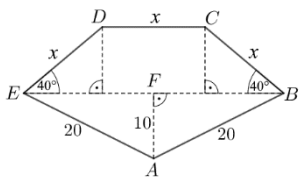
4. b)

$g'(x) = 2px + q$	1 Punkt	
$g''(x) = 2p$	1 Punkt	
Laut den gegebenen Bedingungen sind $p + q + r = 1$, $2p + q = 2$ und $2p = 4$.	2 Punkte	
So ist $p = 2$, $q = -2$ und $r = 1$ (damit ist $g(x) = 2x^2 - 2x + 1$, und so werden alle Bedingungen erfüllt).	2 Punkte	
Insgesamt:	6 Punkte	

4. c)		
$\int_{-3}^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \right) dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - x^2 + x \right]_{-3}^2 =$	1 Punkt	
$= \left(\frac{4}{3} - 4 + 2 \right) - \left(-\frac{9}{2} - 9 - 3 \right) = -\frac{2}{3} - (-16,5) = \frac{95}{6}$	2 Punkte	
Insgesamt: 3 Punkte		

II.

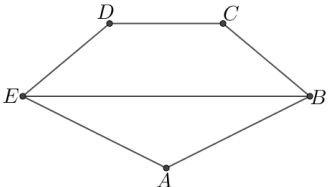
5. a)		
Wir fällen das Lot aus dem Eckpunkt A zur Diagonale EB, es schneidet die Diagonale im Halbierungspunkt F. Dann ist AF = 10 cm.	1 Punkt	
(Das AFBΔ ist die Hälfte eines regelmäßigen Dreiecks, deshalb) im Fünfeck ist die Hälfte des Winkels im Eckpunkt A gleich 60°.	1 Punkt	$\cos BAF\alpha = 0,5$, so ist $BAF\alpha = 60^\circ$.
Deshalb ist $BAE\alpha = 120^\circ$ und $ABE\alpha = AEB\alpha = 30^\circ$.	1 Punkt	
(Da die Winkel eines symmetrischen Trapezes 40°, 40°, 140°, 140° sind), so sind die Winkel des Fünfecks 120°, 70°, 140°, 140°, 70°.	1 Punkt	
Insgesamt: 4 Punkte		

5. b)		
$EB = 2 BF = 2\sqrt{20^2 - 10^2} = 20\sqrt{3} \approx 34,64 \text{ cm}$	1 Punkt*	Der Flächeninhalt des Dreiecks ABE ist gleich dem Flächeninhalt eines regelmäßigen Dreiecks mit der Seitenlänge 20 cm:
Der Flächeninhalt des Dreiecks ABE ist: $\frac{EB \cdot FA}{2} = \frac{20\sqrt{3} \cdot 10}{2} = 100\sqrt{3} \approx 173,2 \text{ cm}^2$.	1 Punkt*	$\frac{20^2 \sqrt{3}}{4} = 100\sqrt{3}$
 Wenn die Seitenlänge CD im Trapez x (in cm gemessen) ist, dann ist $EB = x + 2x \cos 40^\circ$.	1 Punkt	
Also: $34,64 = x + 2x \cos 40^\circ = x(1 + 2 \cos 40^\circ)$,	1 Punkt	
so ist $x \approx 13,68 \text{ cm}$.	1 Punkt	
Die Höhe des Trapezes ist: $x \sin 40^\circ \approx 8,79 \text{ cm}$,	1 Punkt	

sein Flächeninhalt beträgt $\left(\frac{34,64+13,68}{2} \cdot 8,79\right) \approx 212,4 \text{ cm}^2$.	1 Punkt	
Der Flächeninhalt des Fünfecks ist $(173,2 + 212,4 =) 385,6 \text{ cm}^2$.	1 Punkt	
Insgesamt: 8 Punkte		

*Bemerkung: Die mit * markierten Punkte sind auch dann zu geben, wenn der Kandidat aufgrund des Teilergebnisses a) die Länge der Strecken und den Flächeninhalt des Dreiecks berechnet.*

5. c)

Wenn wir in einem Eckpunkt mit der Gradzahl zwei, also aus A, C oder D losgehen, dann sind die Bedingungen des Durchlaufs nicht zu erfüllen (wenn der Ausgangspunkt ein Eckpunkt mit dem Grad zwei ist, dann ist er gleichzeitig auch der Endpunkt, aber so können nur 3, 4 oder 5 Kanten durchlaufen werden).	1 Punkt	Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung hervorkommt.
Wenn der Anfangspunkt (z.B.) B ist, dann gibt es 3 Möglichkeiten in den Punkt E zu gelangen, von dort aus gibt es in allen Fällen immer 2 Möglichkeiten über B nach E zurückzukommen.	1 Punkt	
Wenn B der Ausgangspunkt ist, dann gibt es also $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten die Kanten des Graphen durchzulaufen.	1 Punkt	
Aus dem Eckpunkt E haben wir auch so viele Möglichkeiten, also insgesamt gibt es 12 Möglichkeiten zum Durchlauf.	1 Punkt	
Insgesamt: 4 Punkte		

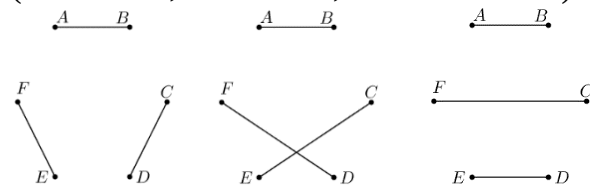
6. a) erste Lösung

Es gibt $\binom{6}{2} = 15$ Möglichkeiten die Mitglieder der ersten Gruppe auszuwählen.	1 Punkt	
Die Mitglieder der zweiten Gruppe können aus den restlichen vier Personen auf $\binom{4}{2} = 6$ Weise ausgewählt werden, und die übriggebliebenen 2 Personen bilden die dritte Gruppe.	1 Punkt	
Insgesamt gibt es $15 \cdot 6 = 90$ Möglichkeiten.	1 Punkt	
Unter den 90 Möglichkeiten kommen alle Gruppen sovielmals vor, wievielmals die drei Gruppen eingereiht werden können (ihre Reihenfolge zählt nämlich nicht),	1 Punkt	

so gibt es wirklich $\frac{90}{3!} = 15$ Möglichkeiten, die drei Gruppen zu bilden.	1 Punkt	
Insgesamt:	5 Punkte	

6. a) zweite Lösung

(Die Personen werden mit den Anfangsbuchstaben ihrer Namen markiert.)
 Wenn z.B. *A* und *B* in einer Gruppe sind, dann können aus *C, D, E, F* die weiteren Gruppen aus zwei Personen auf 3 verschiedene Weise gebildet werden (*CD* und *EF*, *CE* und *DF*, oder *CF* und *DE*).



2 Punkte

Da es bei irgendeinem Partner von *A* 3 Möglichkeiten gibt, die weiteren zwei Gruppen zu bilden, und der Partner von *A* aus 5 Personen gewählt werden kann,

2 Punkte

so gibt es wirklich $5 \cdot 3 = 15$ Möglichkeiten zur Bildung der drei Gruppen.

1 Punkt

Insgesamt: 5 Punkte**6. a) dritte Lösung**

Wir stellen die sechs Mitglieder der Gesellschaft in eine Reihenfolge. Die Personen 1. und die 2., dann die 3. und die 4., zuletzt die 5. und die 6. bilden eine Gruppe.

1 Punkt

Es gibt $6!$ (= 720) Reihenfolgen.

1 Punkt

Innerhalb der drei Gruppen zählt die Reihenfolge nicht, so wurden alle Fälle $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ -mal gezählt.

1 Punkt

Weiterhin ist die unterschiedliche Reihenfolge der drei Gruppen auch nicht relevant bei der Gruppenbildung. Das bedeutet $3!$ (= 6) Möglichkeiten.

1 Punkt

Deshalb gibt es wirklich $\frac{6!}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3!} = 15$ Möglichkeiten die drei Gruppen zu bilden.

1 Punkt

Insgesamt: 5 Punkte

Bemerkung: Wenn der Kandidat alle Möglichkeiten geordnet aufzählt, dann bekommt er die volle Punktzahl.

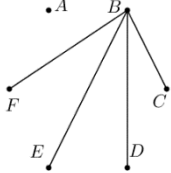
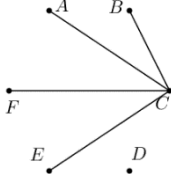
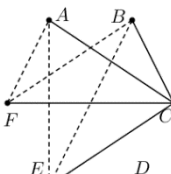
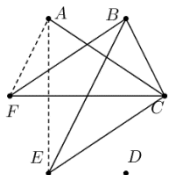
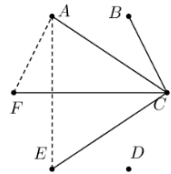
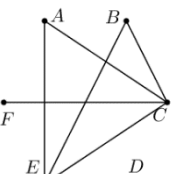
6. b) erste Lösung		
Wählen wir zuerst einen Partner zum Beispiel für Attila. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sein Partner ein Mädchen ist, ist $\frac{3}{5}$.	1 Punkt	
Danach wird zum Beispiel der Partner für Csaba mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ ein Mädchen; der Partner von Emil ist schon bestimmt ein Mädchen.	1 Punkt	
Also die Wahrscheinlichkeit, dass in jedem Team ein Junge und ein Mädchen ist, beträgt $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{5}$.	2 Punkte	
Insgesamt:		4 Punkte

6. b) zweite Lösung		
Wenn jeweils ein Mitglied der drei Teams ein Junge ist, dann kann zu jedem Jungen ein Mädchen gewählt werden.	1 Punkt	<i>Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung hervorkommt.</i>
Dafür gibt es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten, also die Anzahl der günstigen Fälle für die Gruppenbildung ist 6.	2 Punkte	<i>Die möglichen sechs Fällen sind (die Namen wurden mit den Anfangsbuchstaben markiert): AB, CD, EF; AB, CF, ED; AD, CB, EF; AD, CF, EB; AF, CB, ED; AF, CD, EB.</i>
(Da die Anzahl aller Gruppenbildungen 15 ist, so ist) die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{15} = 0,4$.	1 Punkt	
Insgesamt:		4 Punkte

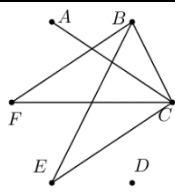
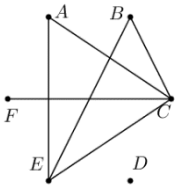
6. b) dritte Lösung		
Wenn die Gruppen aus zwei Personen zufälligerweise gebildet werden, dann (und nur dann) sind solche Fälle ungünstig, wo ein Team aus zwei Mädchen, ein Team aus zwei Jungen und ein gemischtes Team aus zwei Personen gebildet wurden.	1 Punkt	<i>Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung hervorkommt.</i>
Es gibt 3 Möglichkeiten aus 3 Mädchen ein Team aus zwei Mädchen zu bilden. Zu jeder Gruppierung gibt es 3 Möglichkeiten aus 3 Jungen ein Team aus zwei Jungen zu bilden. (Das dritte Team wird aus dem übriggebliebenen Mädchen und Jungen gebildet.)	1 Punkt	<i>Zum gemischten Team können aus 3 Mädchen und 3 Jungen jeweils ein Gruppenmitglied gewählt werden. (In diesem Fall gibt es nur eine ungünstige Möglichkeit die Mitglieder der anderen zwei Teams auszuwählen.)</i>

Die Anzahl der ungünstigen Fälle ist $3 \cdot 3 = 9$.	1 Punkt	<i>Das ist $3 \cdot 3 = 9$-Weise möglich.</i>
(Da die Anzahl aller Fälle bei dieser Gruppenbildung 15 ist, so) ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{9}{15} = \frac{2}{5}$.	1 Punkt	
Insgesamt:	4 Punkte	

6. c)

(Die Namen wurden mit den Anfangsbuchstaben markiert.) Gegen sein Teammitglied konnte keiner spielen, so konnten B, C, D, E und F nur 0, 1, 2, 3 oder 4 Spiele spielen, deshalb kamen alle Fälle genau einmal vor.	1 Punkt	
B konnte 4 Spiele nicht spielen, denn so würde unter den Anzahlen der Spiele von C, D, E und F keine 0 sein.	1 Punkt	
Nehmen wir an, dass C 4 Spiele hatte. In diesem Fall kann die Anzahl der Spiele nur seines Teammitgliedes (D) 0 sein.	1 Punkt	
Von den Spielen $B-E, B-F, A-E, A-F$ müssen diejenige ausgewählt werden, mit denen die Bedingung erfüllt wird, dass die Anzahl der Spiele von B, E, F in irgendeiner Reihenfolge 1, 2, 3 ist.	1 Punkt*	
Wenn B 3 Spiele hätte, dann gäbe es kein Spieler mit 1 Spiel,	1 Punkt*	
und wenn B 1 Spiel hätte, dann gäbe es kein Spieler mit 3 Spielen.	1 Punkt*	
Dementsprechend konnte Boróka nur 2 Spiele spielen (und es ist auch möglich).	1 Punkt	
Insgesamt:	7 Punkte	

*Bemerkung: Die mit *markierten Punkte kann der Kandidat auch für den folgenden Gedankengang bekommen.*

Von den Spielern B, E, F konnte B 3 Spiele nicht spielen, nämlich in diesem Fall hätten E und F auch mindestens 2 Spiele gespielt (mit B und mit C), so gäbe es keinen Spieler mit 1 Spiel.	1 Punkt	
So spielte also jemand aus E und F 3 Spiele. Wir können annehmen, dass diese Person E war (sie spielte dann mit A, B und C).	1 Punkt	
In diesem Fall kann nur F die Person sein, die 1 Spiel spielte (mit C), denn die Personen B, C, E haben mindestens 2 Spiele.	1 Punkt	

Bemerkung: Wenn der Kandidat anhand einer Abbildung, die dem Text entsprechend ist, richtig antwortet, aber nicht begründet, dass es keine weiteren Lösungen gibt, dann kann er 2 Punkte bekommen.

7. a)		
$h(0) = \frac{30}{1 + 59 \cdot 0,905^0} =$	1 Punkt	
$= 0,5 \text{ m hoch war der Baum.}$	1 Punkt	
Insgesamt:		2 Punkte

7. b)		
$10 = \frac{30}{1 + 59 \cdot 0,905^t}$	1 Punkt	
$590 \cdot 0,905^t = 20$ $0,905^t = \frac{2}{59}$	1 Punkt	$0,905^t \approx 0,034$
$t = \log_{0,905} \frac{2}{59}$	1 Punkt	$t \approx \frac{\lg 0,034}{\lg 0,905}$
$t \approx 33,9$	1 Punkt	
Nach Beobachtungsbeginn wird der Baum ungefähr in 34 Jahren 10 Meter hoch.	1 Punkt	
Insgesamt:		5 Punkte

7. c)		
Die Folge $\{0,905^n\}$ ist konvergent und ihr Grenzwert ist 0.	1 Punkt	<i>Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung hervorkommt.</i>
Deshalb ist die Folge $\{a_n\}$ auch konvergent und	2 Punkte	

$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \frac{30}{1+59 \cdot 0} = \frac{30}{1} = 30.$		
Insgesamt:	3 Punkte	

7. d)

Die Zaunstrecke mit dem Preis von 5 Tausend Ft/m sei x m lang, mit dem Preis von 10 Tausend Ft/m sei y m lang ($x > 0, y > 0$). Die Baukosten sind dementsprechend $5x + 10y = 400$ (Tausend Ft). Daraus folgt $y = 40 - 0,5x$.	1 Punkt	$x = 80 - 2y$
Der Flächeninhalt der rechteckigen Plantage (in m^2) ist $xy = x(40 - 0,5x) = 40x - 0,5x^2$.	1 Punkt	$xy = (80 - 2y)y = 80y - 2y^2$
$40x - 0,5x^2 = -0,5(x - 40)^2 + 800$	1 Punkt*	$80y - 2y^2 = -2(y - 20)^2 + 800$
Diese Funktion hat an der Stelle $x = 40$ einen maximalen Wert,	1 Punkt*	<i>Diese Funktion hat an der Stelle $y = 20$ ein Maximum,</i>
und dann ist $y = 20$.	1 Punkt	<i>und dann ist $x = 40$.</i>
Die Plantage mit dem maximalen Flächeninhalt, die aus der Summe 400 Tausend Ft abgezaunt werden kann, hat folgende Seitenlängen: die Seitenlänge mit 5 Tausend Ft/m beträgt 40 m, die Seite mit 10 Tausend Ft/m ist 20 m lang. (So ist der Flächeninhalt der Plantage $800 m^2$).	1 Punkt	
Insgesamt:	6 Punkte	

*Bemerkung: Die *mit markierten Punkte kann der Kandidat auch für den folgenden Gedankengang bekommen.*

$f:]0; 80[\rightarrow \mathbf{R}; f(x) = 40x - 0,5x^2$ Die notwendige Bedingung für einen Extremwert ist $f'(x) = 40 - x = 0$.	1 Punkt	
So ist $x = 40$, die Ableitungsfunktion wechselt an dieser Stelle vom Positiven ins Negative, deshalb hat die Funktion f eine (absolute) Maximumstelle.	1 Punkt	

oder

$xy = x(40 - 0,5x) = 0,5 \cdot x(80 - x)$. Es wird für die Faktoren des Produktes $x(80 - x)$ die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel verwendet: $x(80 - x) \leq \left(\frac{x + 80 - x}{2}\right)^2 = 1600.$	1 Punkt	
Die Ungleichung wird genau dann erfüllt, wenn $x = 80 - x$ ist, also ist $x = 40$. Diese Stelle ist die Maximumstelle der Funktion f .	1 Punkt	

8. a)		
Das Ereignis E_0 wird genau dann erfüllt, wenn keine der Durchgänge vom Bereich A geöffnet sind.	1 Punkt	
Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $(1-p)^2$.	1 Punkt	
$(1-p)^2 = 1-2p+p^2$, die Aussage stimmt.	1 Punkt	
Insgesamt:	3 Punkte	

8. b)		
$1-2p+p^2 = (1-p)^2$, also $(1-p)^2 \leq 0,01$ ist.	1 Punkt	$1-2p+p^2 \leq 0,01$ $p^2 - 2p + 0,99 \leq 0$
Denn $p < 1$ ist, deshalb ist $0 < 1-p \leq \sqrt{0,01} = 0,1$.	1 Punkt	$p^2 - 2p + 0,99 = 0$ <i>die Lösungen sind 0,9 und 1,1.</i>
Also für $0,9 \leq p (<1)$ ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_0 höchstens 0,01.	1 Punkt	
Insgesamt:	3 Punkte	

8. c)		
Das Ereignis E_1 wird genau dann erfüllt, wenn von den zwei Durchgängen des Bereiches A, ein Durchgang geöffnet ist, der andere ist nicht geöffnet, und der Durchgang zwischen den Bereichen B und C auch nicht geöffnet ist.	1 Punkt	
Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\binom{2}{1} p(1-p) \cdot (1-p) =$	1 Punkt	
$= 2p - 4p^2 + 2p^3$, es stimmt.	1 Punkt	
Das Ereignis E_2 wird genau dann erfüllt, wenn mindestens zwei Durchgänge (also 3 oder 2) geöffnet sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist: $p^3 + \binom{3}{2} p^2(1-p) =$	1 Punkt*	
$= p^3 + 3p^2 - 3p^3 = 3p^2 - 2p^3$, es stimmt.	1 Punkt*	
Insgesamt:	5 Punkte	

Bemerkung: Die mit* markierten Punkte sind auch für den folgenden Gedankengang zu geben.

$(E_0, E_1$ und E_2 bilden einen vollständigen Ergebnisraum, so ist) $P(E_2) = 1 - P(E_0) - P(E_1) =$	1 Punkt	
$= 1 - (1-2p+p^2) - (2p-4p^2+2p^3) = 3p^2 - 2p^3$, es stimmt.	1 Punkt	

8. d)		
(Die Funktion $f:]0; 1[\rightarrow \mathbf{R}; f(p) = 2p - 4p^2 + 2p^3$ hat an der Stelle einen Maximumwert, wo die erste Ableitung Null ist.) $f'(p) = 2 - 8p + 6p^2 = 0$	1 Punkt	
$p = 1$ oder $p = \frac{1}{3}$	1 Punkt	
$p = 1$ ist keine Lösung (denn $p < 1$ ist).	1 Punkt	
Wenn $p = \frac{1}{3}$ ist, dann ist $f''\left(\frac{1}{3}\right) = -8 + 4 = -4 < 0$, also sie ist die Maximumstelle der Funktion. (Im Intervall $]0; 1[$ ist sie eine absolute Maximumstelle der Funktion.)	1 Punkt	An der Stelle $p = \frac{1}{3}$ verändert die Funktion ihre Monotonie von steigend in fallend, so ist sie die Maximumstelle der Funktion.
So ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\left(2 \cdot \frac{1}{3} - 4 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{27}\right) \frac{8}{27} (\approx 0,296).$	1 Punkt	
Insgesamt:		5 Punkte

9. a)		
(Insgesamt gibt es $\binom{5}{2} = 10$ Produkte mit zwei Faktoren.) $2 \cdot 4, 2 \cdot 6, 2 \cdot 8, 2 \cdot 10,$ $4 \cdot 6, 4 \cdot 8, 4 \cdot 10,$ $6 \cdot 8, 6 \cdot 10,$ $8 \cdot 10.$	3 Punkte	
Ihre Summe ist $(8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 32 + 40 + 48 + 60 + 80) = 340.$	1 Punkt	
Insgesamt:		4 Punkte

9. b)		
$S_{k+1} = S_k + 1 \cdot (k+1) + 2 \cdot (k+1) + \dots + k \cdot (k+1)$	2 Punkte	
$S_{k+1} = S_k + (1 + 2 + \dots + k) \cdot (k+1) =$	1 Punkt	
$= S_k + \frac{k(k+1)}{2} \cdot (k+1) = S_k + \frac{k(k+1)^2}{2},$ es stimmt.	1 Punkt	
Insgesamt:		4 Punkte

9. c) erste Lösung		
Der Beweis mit vollständiger Induktion: Für $n = 2$ gilt $S_2 = 1 \cdot 2 = 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8}{24} = \frac{48}{24}$, das ist wahr.	1 Punkt	
Es ist zu zeigen: Wenn die Aussage für eine beliebige k ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$) Zahl gültig ist, dann ist sie auch für $k+1$ richtig, also $S_{k+1} = \frac{k(k+1)(k+2)(3k+5)}{24}$ ist.	1 Punkt	<i>Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung hervorkommt.</i>
Laut der Teilaufgabe b) ist $S_{k+1} = S_k + \frac{k(k+1)^2}{2} =$ $= \frac{(k-1)k(k+1)(3k+2)}{24} + \frac{k(k+1)^2}{2}.$	1 Punkt	
Wenn man $k(k+1)$ ausklammert: $S_{k+1} = k(k+1) \cdot \frac{(k-1)(3k+2)+12(k+1)}{24} =$	1 Punkt	
$= k(k+1) \cdot \frac{3k^2+11k+10}{24}.$	1 Punkt	
Die Summe $3k^2+11k+10 = (k+2)(3k+5)$ ist,	2 Punkte	
so ist $S_{k+1} = \frac{k(k+1)(k+2)(3k+5)}{24}$, das bedeutet, dass die ursprüngliche Aussage richtig ist.	1 Punkt	
Insgesamt: 8 Punkte		

9. c) zweite Lösung		
(Wenn n eine positive ganze Zahl ist und $n \geq 2$ gilt.) $(1+2+3+\dots+n)^2 =$ $= (1^2+2^2+\dots+n^2) + 2 \cdot (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n).$	1 Punkt	
So bekommt man $2 \cdot (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n) =$ $= (1+2+\dots+n)^2 - (1^2+2^2+\dots+n^2).$	1 Punkt	
Da $(1+2+\dots+n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ist	1 Punkt	
und $1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ist,	1 Punkt	
deshalb $2 \cdot (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n) =$ $= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$	1 Punkt	

$= n(n+1) \left(\frac{n(n+1)}{4} - \frac{2n+1}{6} \right) = n(n+1) \cdot \frac{3n^2 - n - 2}{12}$ ist.	1 Punkt	
$3n^2 - n - 2 = (3n+2)(n-1)$, so ist $2 \cdot (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n) = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{12}$.	1 Punkt	
Wenn der Term durch 2 geteilt wird, dann bekommen wir die Aussage, die zu beweisen war.	1 Punkt	
Insgesamt:	8 Punkte	