

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2024. május 7.

MATEMATIKA NÉMET NYELVEN

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI HIVATAL

Wichtige Hinweise

Formvorschriften:

1. Die Arbeit ist mit einem **andersfarbigen Stift**, als der Abiturient ihn benutzt hat, **lesbar** zu korrigieren.
2. In den Kästchen neben den Aufgaben steht zuerst die maximale Punktzahl. Der Korrektor trägt die von ihm gegebene **Punktzahl in das zweite Kästchen** ein.
3. **Bei einwandfreier Lösung** markieren Sie neben der maximalen Punktzahl mit Haken, dass Sie die Gedankeneinheit gesehen haben, und sie als richtig beurteilt haben.
4. Bei fehlerhaften oder mangelhaften Lösungen **markieren Sie den Fehler** und geben Sie bitte auch die **Teilpunkte** für die richtigen Schritte an. Wenn die Korrektur besser nachvollziehbar ist, dann dürfen auch die verlorenen Punkte markiert werden. Kein Teil darf in der Arbeit bleiben, wo nach der Korrektur nicht eindeutig ist, ob er richtig, falsch oder überflüssig ist.
5. Während der Korrektur **benutzen Sie die folgenden Bezeichnungen**:
 - richtiger Schritt: *Haken*
 - theoretischer Fehler: *zweimaliges Unterstreichen*
 - Rechenfehler oder sonstige, nicht theoretischer Fehler: *einmaliges Unterstreichen*
 - mit falschen Ausgangsdaten durchgeführter richtiger Schritt: *gestrichelter oder durchgestrichener Haken*
 - mangelhafte Begründung, mangelhaftes Aufzählen, andere Mängel: *Mangelzeichen*
 - nicht verständlicher Teil: *Fragezeichen und/oder Wellenlinie*
6. Mit **Bleistift** geschriebenen Teile außer Abbildungen dürfen nicht bewertet werden.

Inhaltliche Fragen:

1. Bei einigen Aufgaben sind verschiedene Lösungswege angegeben. Wenn eine, von diesen Lösungswegen **unterschiedliche Lösung** vorkommt, suchen Sie die gleichwertigen Teile und verteilen die Punkte entsprechend.
2. Die vorgeschriebenen Punktzahlen lassen sich weiter **zerlegen, es sei denn der Lösungsschlüssel erlaubt das nicht**, dürfen aber nur als ganze Punkte vergeben werden.
3. Wenn der Schüler einen **Rechenfehler** macht oder ungenau wird, bekommt er nur für den Teil keinen Punkt, wo der Fehler lag. Wenn er mit falschem Teilergebnis, aber mit richtigem Gedankengang weiterrechnet, und dadurch das zu lösende Problem sich nicht wesentlich verändert, sind die weiteren Teilpunkte zu gewähren.
4. Begeht der Schüler einen **theoretischen Fehler**, so bekommt er innerhalb einer Gedankeneinheit (diese wird in der Anweisung mit Doppellinie markiert) auch für die formell richtigen mathematischen Schritte keinen Punkt. Wenn der Schüler in einer folgenden Teilaufgabe oder Gedankeneinheit mit diesem falschen Ergebnis als Ausgangswert richtig weiterrechnet, dadurch aber das zu lösende Problem sich nicht wesentlich verändert, bekommt er die maximale Punktzahl für diesen neuen Teil.

5. Wenn in der Anweisung eine **Bemerkung** in Klammern steht, dann kann die Lösung auch ohne diese mit voller Punktzahl bewertet werden.
6. **Ohne die Angabe der Maßeinheit** werden Punkte nur dann abgezogen, wenn die Maßeinheit in der Antwort oder bei der Umwandlung der Maßeinheit fehlt (ohne Klammern).
7. Bei mehreren Lösungen für eine Aufgabe ist **nur die eine zu bewerten, die der Schüler markiert hat**. Während der Korrektur markieren Sie eindeutig, welche Version bewertet wurde, welche nicht.
8. **Zusatzpunkte** (mehr Punkte als die vorgeschriebene maximale Punktzahl für die Aufgabe) sind **nicht zugelassen**.
9. Die Gesamtpunktzahl einer Aufgabe oder Teilaufgabe **darf nicht negativ sein**.
10. Es gibt **keinen Punktabzug** für Berechnungen und Schritte, die zwar falsch sind, aber vom Schüler bei der Lösung der Aufgabe nicht weiterverwendet werden.
11. Während der Aufgabenlösung kann man **den Gebrauch des Taschenrechners – ohne weitere mathematische Begründung – bei den folgenden Rechnungen akzeptieren**: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzieren, Wurzelziehen, Berechnen von $n!$, $\binom{n}{k}$, für die Ersetzung der Tabellen im Tafelwerk (sin, cos, tg, log und ihre Umkehrfunktionen), zur Angabe des Näherungswertes von den Zahlen π und e , zur Bestimmung der Lösungen einer auf Null reduzierten quadratischen Gleichung. Weiterhin darf man den Taschenrechner ohne mathematische Begründung für die Berechnung bestimmten statistischen Berechnungen (der Durchschnitt und die Streuung) verwenden, es sei denn der Text der Aufgabe verlangt eindeutig die Nebenrechnungen dazu. **In anderen Fällen gelten die mit Taschenrechner durchgeführten Rechnungen als nicht begründete Schritte, für die keine Punkte verteilt werden können.**
12. Wenn **Abbildungen** als Beweise verwendet wurden (z.B. das Ablesen der Daten durch Messung), ist dies nicht akzeptabel.
13. Bei der Angabe von **Wahrscheinlichkeiten** (wenn der Text der Aufgabe nichts Anderes sagt) dürfen auch in Prozent angegebene richtige Lösungen akzeptiert werden.
14. Wenn der Text der Aufgabe kein Runden vorschreibt, dann sind auch Teil- und Endergebnisse akzeptierbar, die vom Lösungsschlüssel abweichen aber **sinnvoll und richtig gerundet wurden**.
15. **Im Teil II sind aus den 5 Aufgaben nur Lösungen von 4 Aufgaben zu bewerten.** Der Abiturient hat die Nummer der Aufgabe, die nicht bewertet werden soll, in das entsprechende Kästchen – vermutlich – eingetragen. Dementsprechend wird die eventuell vorhandene Lösung für diese Aufgabe nicht korrigiert. Wenn die ausgewählte Aufgabe nicht eindeutig feststeht, und die Wahl der Aufgabe in der Arbeit nicht eindeutig zu sehen ist, dann ist die nicht zu bewertende Aufgabe automatisch die letzte Aufgabe der vorgegebenen Aufgabenreihe.

I.

1. a) erste Lösung		
(Da 2^x immer positiv ist, so ist die Gleichung für alle reelle Zahlen definiert.) Beide Seiten werden quadriert: $2^x = 2^{2x+2} - 2 \cdot 2^{x+1} + 1$.	1 Punkt	
Eine Seite der Gleichung wird auf Null reduziert: $0 = 4 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 1$.	1 Punkt	
Die Gleichung ist für 2^x quadratisch, die Lösungen sind: $2^x = 1$ oder $2^x = \frac{1}{4}$.	1 Punkt	
Im ersten Fall ist $x = 0$, im zweiten Fall ist $x = -2$.	2 Punkte	
Durch Einsetzen ergibt sich, dass $x = 0$ eine richtige Lösung, $x = -2$ keine Lösung ist.	1 Punkt*	
Insgesamt:		6 Punkte

*Bemerkung: Der mit * markierte Punkt ist auch dann zu geben, wenn der Kandidat feststellt, dass sich $x \geq -1$ wegen der Ungleichung $2^{x+1} - 1 \geq 0$ ergibt, und danach er auf Bezug der äquivalenten Umformungen nur die Lösung $x = 0$ annimmt.*

1. a) zweite Lösung		
(Da 2^x immer positiv ist, so ist die Gleichung für alle reelle Zahlen definiert.) Die Gleichung ist für $A = \sqrt{2^x}$ quadratisch, mit dieser neuen Unbekannten ergibt sich: $A = 2A^2 - 1$ $0 = 2A^2 - A - 1$.	1 Punkt	
Die Lösungen sind: $A = 1$ oder $A = -\frac{1}{2}$.	1 Punkt	
Im ersten Fall ist $x = 0$, im zweiten Fall gibt es keine Lösung (denn $A > 0$ ist).	2 Punkte	
Durch Einsetzen ergibt sich, dass $x = 0$ eine richtige Lösung ist.	1 Punkt	
Insgesamt:		6 Punkte

1. b)		
Der Zusammenhang $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ wird eingesetzt: $2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 0$.	1 Punkt	
Eine Seite der Gleichung wird auf Null reduziert: $0 = 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2$.	1 Punkt	
Die Gleichung ist für $\cos x$ quadratisch; die Lösungen sind: $\cos x = 2$ oder $\cos x = -\frac{1}{2}$.	1 Punkt	

Im ersten Fall gibt es keine Lösung,	1 Punkt	
im zweiten Fall ist $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.	2 Punkte*	
Es wurden nur äquivalente Umformungen durchgeführt.	1 Punkt	
Insgesamt:		7 Punkte

*Bemerkung: Wenn der Kandidat nur die eine Lösungsreihe angibt, oder (nur) in Gradmaß (alle) Lösungen (richtig) bestimmt, oder es wird nicht angegeben, dass k eine ganze Zahl ist, dann von den mit * markierten Punkten wird je 1 Punkt (insgesamt höchstens 2 Punkte) abgezogen.*

2. a)		
$\frac{28}{40} = 0,7$, Aliz fand also 70% der Fehler, die Hanna bemerkte,	1 Punkt	
sie fand also auch 70% aller Fehler. 70% aller Fehler ist gleich 35, deshalb ist 50 die Anzahl aller Fehler im ganzen Text.	2 Punkte	
Aliz und Hanna fanden insgesamt $35 + 40 - 28 = 47$ unterschiedliche Fehler,	1 Punkt	
so wurden von ihnen ($50 - 47 =$) 3 Fehler nicht entdeckt.	1 Punkt	
Insgesamt:		5 Punkte

2. b)		
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Sekretärin ein Zeichen richtig tippt, ist: ($1 - 0,002 =$) 0,998.	1 Punkt	<i>Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung hervorkommt.</i>
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine ganze Seite (aus 2000 Zeichen) fehlerfrei wird, ist: $0,998^{2000} \approx$	1 Punkt	
$\approx 0,0182$ ist es wirklich.	1 Punkt	
Insgesamt:		3 Punkte

2. c)		
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auf einer Seite Fehler gibt, ist ($1 - 0,0182 =$) 0,9818.	1 Punkt	<i>Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung hervorkommt.</i>
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass aus 150 Seiten keine Seiten fehlerfrei sind, ist $P(0) = 0,9818^{150} \approx 0,0636$.	1 Punkt	
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass aus 150 Seiten genau eine fehlerfrei ist, ist $P(1) = \binom{150}{1} \cdot 0,0182 \cdot 0,9818^{149} \approx 0,1768$.	2 Punkte	

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass aus 150 Seiten mindestens zwei Seiten fehlerfrei sind, ist $1 - P(0) - P(1) \approx 0,760$.	1 Punkt	
Insgesamt: 5 Punkte		

Bemerkung: Wenn der Kandidat die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses berechnet, dass aus 150 Seiten genau zwei Seiten fehlerfrei sind, bekommt er höchstens 3 Punkte.

3. a)		
Der Graph von f ist eine nach unten geöffnete Parabel.	1 Punkt	<i>Eine skizzierte Abbildung ist auch akzeptabel.</i>
$f(x) = -0,5x(x-6)$, so ist die erste Koordinate des Scheitelpunktes $\left(\frac{0+6}{2} = \right) 3$.	1 Punkt	<i>Mit quadratischer Ergänzung ergibt sich: $f(x) = -0,5(x-3)^2 + 4,5$ (sein Maximalwert ist $y=4,5$).</i>
$f(3) = 4,5$	1 Punkt	
Die Wertemenge ist $]-\infty; 4,5]$.	1 Punkt	<i>Eine andere richtige Bezeichnung ist auch akzeptabel.</i>
Insgesamt: 4 Punkte		

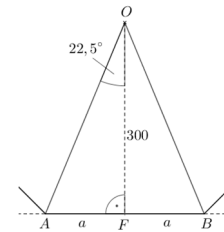
3. b)		
Die Steigung der Tangente ist gleich $f'(6)$.	1 Punkt	<i>Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung hervorkommt.</i>
$f'(x) = -x + 3$,	1 Punkt	
so ist $f'(6) = -3$.	1 Punkt	
Die Gleichung der Tangente ist $y = -3(x - 6)$.	2 Punkte	$y = -3x + 18$
Insgesamt: 5 Punkte		

3. c)		
(Die Funktion g ist eine Stammfunktion der Funktion f : $g \in \int f$, also) $g(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + c$.	2 Punkte	
Aus der Bedingung $g(3) = 7$ ergibt sich $-\frac{1}{6} \cdot 3^3 + \frac{3}{2} \cdot 3^2 + c = 7$,	1 Punkt	
dann ist $c = -2$. (So ist $g(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2$.)	1 Punkt	
Insgesamt: 4 Punkte		

4. a) erste Lösung

Sei O der Mittelpunkt des regelmäßigen Achtecks, der mit den Endpunkten der Seite AB verbunden wird. So entsteht ein gleichschenkliges Dreieck mit den folgenden Eigenschaften: die Schenkel schließen 45° ein, und die Höhe zur Basis AB ist 300 mm lang.

2 Punkte



Im rechtwinkligen Dreieck AFO (laut den Bezeichnungen der Abbildung) ist $\tan 22,5^\circ = \frac{a}{300}$ (da OF die Winkelhalbierende ist).

2 Punkte

So ist $a \approx 124,26$ (mm).

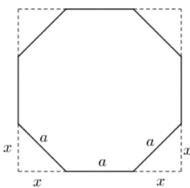
1 Punkt

Die Seite des regelmäßigen Achtecks ist $2a \approx 248,5$ mm lang.

1 Punkt

Insgesamt: 6 Punkte

4. a) zweite Lösung



Die Länge der Seite des regelmäßigen Achtecks sei a mm. Von dem Quadrat mit der 600 mm langen Quadratseite wurden kleine Dreiecke abgeschnitten, deren Katheten x mm lang sind ($x < 300$):

2 Punkte

$$2x + a = 600, a = 600 - 2x.$$

(Laut dem Satz von Pythagoras ist:) $2x^2 = a^2$, also $2x^2 = (600 - 2x)^2$.

1 Punkt

$$2x^2 = 360000 - 2400x + 4x^2$$

$$0 = x^2 - 1200x + 180000$$

1 Punkt

$$x_1 \approx 175,74, \text{ bzw. } x_2 \approx 1024,26.$$

1 Punkt

Die zweite Lösung ist nicht möglich, so ist die Seite des regelmäßigen Achtecks $(600 - 2x_1 \approx) 248,5$ mm lang.

1 Punkt

Insgesamt: 6 Punkte

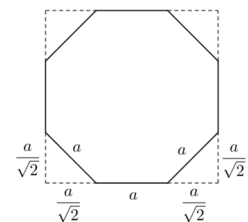
4. a) dritte Lösung

Sei a die Länge der Seite des regelmäßigen Achtecks (in mm gemessen). Das Achteck wird aus einem Quadrat mit der Seitenlänge $D = 600$ mm erstellt.

1 Punkt

Bei den Eckpunkten des Quadrates werden gleichschenklige Dreiecke mit der Hypotenuse a abgeschnitten, so sind die Katheten $\frac{a}{\sqrt{2}}$ lang.

1 Punkt



Deshalb ist die Länge der Seite des Quadrates (laut der Abbildung) $a + 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = a(1 + \sqrt{2})$,	2 Punkt	
also $a(1 + \sqrt{2}) = 600$.	1 Punkt	
Dann bekommt man $a \approx 248,5$, also die Seite des regelmäßigen Achtecks ist 248,5 mm lang.	1 Punkte	
Insgesamt:	6 Punkte	

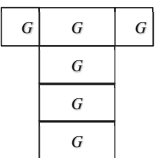
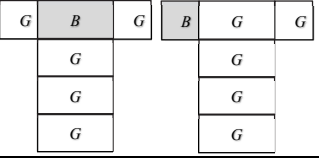
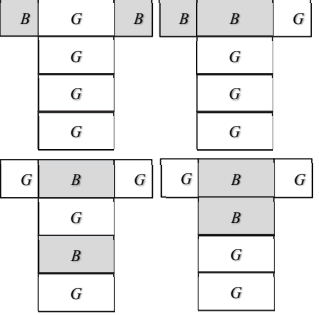
4. b) erste Lösung

(Die Aussage wird durch vollständige Induktion bewiesen.) Die Aussage ist für $n = 1$ richtig ($3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1$).	1 Punkt	
Nehmen wir an, dass die Aussage für $n = k$ ($k \geq 1$) richtig ist: die Anzahl der fertigten Sechsecke nach dem k -ten Schritt ist $3k^2 - 3k + 1$.	1 Punkt	
Es ist zu zeigen, dass nach dem $(k + 1)$ -ten Schritt $3(k + 1)^2 - 3(k + 1) + 1 = 3k^2 + 3k + 1$ Sechsecke sind.	1 Punkt	
Im $(k + 1)$ -ten Schritt nimmt die Anzahl der Sechsecke um $6k$ zu,	1 Punkt	
so ist die Anzahl der Sechsecke nach dem $(k + 1)$ -ten Schritt $3k^2 - 3k + 1 + 6k =$	1 Punkt	
$= 3k^2 + 3k + 1$ wirklich. Damit wurde die Aussage bewiesen.	1 Punkt	
Insgesamt:	6 Punkte	

4. b) zweite Lösung

Die Anzahl der in den einzelnen Schritten gebauten neuen Sechsecke bilden ab dem zweiten Schritt eine arithmetische Folge, deren erstes Glied und die Differenz jeweils 6 sind.	2 Punkte	
Die Anzahl der neuen Zellen ab dem zweiten bis zum n -ten Schritt (insgesamt in $n - 1$ Schritten) ist: $\frac{2 \cdot 6 + (n - 2) \cdot 6}{2} \cdot (n - 1) =$	2 Punkte	
$= 3n^2 - 3n$.	1 Punkt	
Mit der im ersten Schritt gebauten Zelle zusammen ist die Anzahl der insgesamt gebauten Sechsecke wirklich $3n^2 - 3n + 1$.	1 Punkt	
Insgesamt:	6 Punkte	

II.

5. a)		
(Von den 6 Flächen der quadratischen Säule können 6, 5 oder 4 gelb sein.) Es gibt nur eine quadratische Säule mit sechs gelben Flächen.	1 Punkt	Die Färbung des Netzes kann nur eine der folgenden sein: 
Es gibt 2 solche quadratische Säulen, die fünf gelbe Flächen und eine blaue Fläche haben (eine Seitenfläche oder eine Grundfläche).	1 Punkt	
Wenn die quadratische Säule vier gelbe und zwei blaue Flächen hat, dann können die zwei blauen Flächen – die zwei Grundflächen (1 Fall), – eine Grundfläche und eine Seitenfläche (1 Fall), – zwei Seitenflächen (sie liegen entweder einander gegenüber oder haben eine gemeinsame Kante) (2 Fälle) sein. Es gibt insgesamt 4 Fälle.	2 Punkte	
Im Bauspiel gibt es insgesamt $1 + 2 + 4 = 7$ quadratische Säulen.	1 Punkte	
Insgesamt:	5 Punkte	

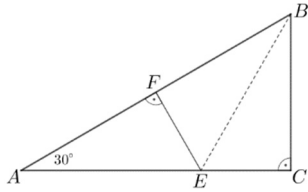
5. b)		
Die Grundkante der quadratischen Säule sei x cm lang. Ihre Oberfläche ist $A = 2x^2 + 88x = 384$ (cm²).	1 Punkt	
Die positive Lösung der quadratischen Gleichung $2x^2 + 88x - 384 = 0$ ist $x = 4$ (die andere Lösung ist $x = -48$).	1 Punkt	$x^2 + 44x - 192 = 0$
Die Grundkante ist 4 cm lang, das Volumen der Säule ist so ($4^2 \cdot 22 =$) 352 cm³.	1 Punkt	
Insgesamt:	3 Punkte	

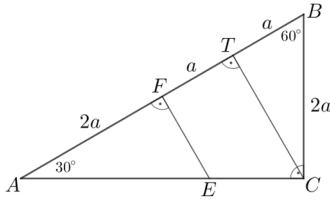
5. c)		
Die Grundkante der quadratischen Säule sei a cm, die Seitenkante sei b cm lang. So ist ihre Oberfläche $A = 2a^2 + 4ab = 384(\text{cm}^2)$,	1 Punkt	
daraus ist $b = \frac{384 - 2a^2}{4a}$ (wo $a \in]0; \sqrt{192}[$).	1 Punkt	
Die Summe der Kantenlängen ist: $8a + 4b = 8a + \frac{384 - 2a^2}{a} = 6a + \frac{384}{a}$.	1 Punkt	
Die Ableitungsfunktion der (im Intervall $]0; \sqrt{192}[$ definierte) Funktion $f(a) = 6a + \frac{384}{a}$ ist $f'(a) = 6 - \frac{384}{a^2}$.	1 Punkt*	
Die Funktion f kann eine Minimumstelle an der Stelle haben, wo $f'(a) = 0$ ist, also bei $a = 8$ (denn $a \in]0; \sqrt{192}[$).	2 Punkte*	
Da $f''(a) = \frac{768}{a^3} > 0$ ist, so ist diese Stelle wirklich eine (absolute) Minimumstelle.	1 Punkt*	
Dann ist $b = \frac{384 - 2 \cdot 8^2}{4 \cdot 8} = 8$ (die quadratische Säule ist also ein Würfel, die kleinste Summe ist 96 cm).	1 Punkt	
Insgesamt: 8 Punkte		

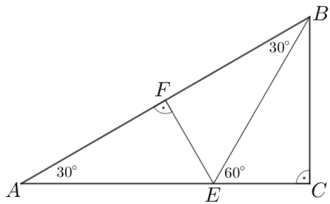
Bemerkung: Die mit markierten 4 Punkte können auch für den folgenden Gedankengang gegeben werden.*

Mit Hilfe des Zusammenhangs zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel gilt: $6a + \frac{384}{a} \geq 2 \cdot \sqrt{6a \cdot \frac{384}{a}} = 2 \cdot \sqrt{2304} = 96$.	2 Punkte	
Die Gleichheit wird genau dann erfüllt, wenn $6a = \frac{384}{a}$, also $a = 8$ ist.	2 Punkte	

6. a) erste Lösung		
Sei x die Länge der Strecke AF , so ist $AB = 2x$ lang, dann ist im rechtwinkligen Dreieck ABC	1 Punkt	<i>Wir nehmen an, dass $BC = 1$ ist, denn die Verhältnisse werden so nicht verändert.</i>
$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{2x}$,		
damit ist $AC = \sqrt{3}x$.	1 Punkt	<i>Dann ist $AB = 2$ und $AC = \sqrt{3}$.</i>
Im Dreieck AFE ist $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AF}{AE} = \frac{x}{AE}$,	1 Punkt	<i>Da $AF = 1$ ist, deshalb ist $AE = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{3}AC$,</i>
damit ist $AE = \frac{2}{\sqrt{3}}x$.	1 Punkt	<i>so ist $EC = AC - AE = \frac{1}{3}AC$.</i>
$AE : AC = \frac{2}{\sqrt{3}}x : \sqrt{3}x = 2 : 3$, deshalb ist $AE : EC = 2 : 1$.	1 Punkt	<i>Deshalb ist $AE : EC = 2 : 1$.</i>
Insgesamt: 5 Punkte		

6. a) zweite Lösung		
Das Dreieck ABC ist die Hälfte eines regelmäßigen (gleichseitigen) Dreiecks, so ist $AB = 2BC$, also ist $BF = BC$.	1 Punkt	
Die Dreiecke BFE und BCE sind deckungsgleich, denn $BF = BC$ ist, weiterhin haben sie eine gemeinsame Seite, die Seite BE , und die Gegenwinkel der längeren Seiten stimmen überein (ein rechter Winkel).	1 Punkt	
Deshalb ist ihre dritte Seite auch gleichlang: $EF = EC$.	1 Punkt	
So bekommt man $\frac{AE}{EC} = \frac{AE}{EF} = \frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{1}$.	2 Punkte	<i>Das Dreieck AEF ist die Hälfte eines regelmäßigen Dreiecks: $AE = 2EF$, also $AE = 2EC$ ist. Der Punkt E ist ein Dreiteilungspunkt, der näher zum Punkt C liegt.</i>
Insgesamt: 5 Punkte		

6. a) dritte Lösung		
Wir zeichnen im Dreieck ABC die Höhe zur Hypotenuse. Sei T der Fußpunkt dieser Höhe. Die Dreiecke ABC , AFE und BCT sind je eine Hälfte eines regelmäßigen Dreiecks. Die Hypotenuse eines solchen Dreiecks ist doppelt so lang, wie die kürzere Kathete.	1 Punkt	
Sei $BT = a$ lang, dann sind $BC = 2a$, $AB = 4a$. Der Punkt F ist der Halbierungspunkt, deshalb ist $AF = FB = 2a$, also $FT = (FB - BT) = a$ ist.	2 Punkte	
Damit ist der Punkt F der Dreiteilungspunkt der Strecke AT , der näher zu T liegt.	1 Punkt	
Die Strecken EF und CT sind parallel, dann ist der Strahlensatz gültig, so ist auch der Punkt E der Dreiteilungspunkt der Strecke AC , der näher zu C liegt.	1 Punkt	
Insgesamt:		5 Punkte

6. a) vierte Lösung		
Der Punkt E liegt auf der Mittelsenkrechte der Seite AB , deshalb ist $AE = BE$.	1 Punkt	
Das Dreieck AEB ist gleichschenkelig, so ist $\angle ABE = \angle BAE = 30^\circ$.	1 Punkt	
$\angle BEC = 60^\circ$ gilt (er ist ein Außenwinkel im Dreieck AEB), deshalb ist das rechtwinklige Dreieck BEC die Hälfte eines regelmäßigen Dreiecks.	1 Punkt	
So ist $BE = AE = 2 \cdot EC$,	1 Punkt	
deshalb ist der Punkt E der Dreiteilungspunkt der Strecke AC , der näher zu C liegt ($AE:EC = 2:1$).	1 Punkt	
Insgesamt:		5 Punkte

6. a) fünfte Lösung		
Das Dreieck ABC wird zu einem regelmäßigen Dreieck ergänzt,	1 Punkt	<i>Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung hervorkommt.</i>
und in diesem Dreieck ABB' ist AC eine Seitenhalbierende.	1 Punkt	
Die Strecke FE liegt auf der Mittelsenkrechte der Seite AB ,	1 Punkt	
deshalb ist die Strecke FB' auch eine Seitenhalbierende und E der Schwerpunkt des regelmäßigen Dreiecks ABB' .	1 Punkt	
So ist der Punkt E der Dreiteilungspunkt der Strecke AC , der näher zu C liegt.	1 Punkt	
Insgesamt:		5 Punkte

6. b)		
(Bei der Lösung wird der folgende bekannte Satz verwendet: Wenn ein rechtwinkliges Dreieck einen spitzen Winkel von 30° hat, dann ist die Länge der Gegenkathete dieses Winkels halb so groß, wie die Hypotenuse. Das Dreieck H_1 ist ähnlich zum ursprünglichen Dreieck (sie stimmen in ihren Winkeln überein), das Ähnlichkeitsverhältnis ist $1:2$ (denn die Hypotenuse des Dreiecks H_1 ist gleich der kürzeren Kathete des Dreiecks ABC , ihre Länge ist die Hälfte der Hypotenuse),	1 Punkt	
so ist der Flächeninhalt des Dreiecks H_1 ein Viertel des Flächeninhaltes vom ursprünglichen Dreieck.	1 Punkt	
Durch das Abschneiden des Dreiecks H_1 bleibt ein Dreieck übrig, dessen Flächeninhalt drei Viertel ($0,75$ -fache) des Flächeninhaltes vom ursprünglichen Dreieck ist.	1 Punkt	
Dieser Vorgang wird in den weiteren Schritten wiederholt, wobei nach dem Abscheiden bleibt immer das $0,75$ -fache des Flächeninhaltes vom vorigen Dreieck übrig.	1 Punkt	<i>Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung hervorkommt.</i>
Wenn vom Dreieck 13-mal die kleinen Dreiecke abgeschnitten werden, dann ist der übriggebliebene Flächeninhalt das $0,75^{13} \approx 0,024$ -fache des Flächeninhaltes vom ursprünglichen Dreieck ABC ,	1 Punkt	
also etwa $2,4\%$.	1 Punkt	
Insgesamt:		6 Punkte

6. c)		
$\frac{PP_2}{CP_1} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	1 Punkt	
ist das Längenverhältnis (laut den Eigenschaften der Ähnlichkeit) zweier benachbarten Strecken des Streckenzuges.	1 Punkt	<i>Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung hervorkommt.</i>
Die nacheinander folgenden Streckenlängen des Streckenzuges bilden eine geometrische Folge, wobei das erste Glied $CP_1 = 2 - \sqrt{3}$, der Quotient $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ist.	1 Punkt	
Die Länge des unendlichen Streckenzuges (sie wurde aus der geometrischen Folge gebildet) ist die Summe der unendlichen geometrischen Reihe (sie existiert, denn $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ ist), also $S = \frac{2 - \sqrt{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} =$	1 Punkt	
$= \frac{2 - \sqrt{3}}{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} = 2$ ist.	1 Punkt	
Insgesamt: 5 Punkte		

Bemerkung: Wenn der Kandidat in Ihrer Lösung (auch) einen Näherungswert verwendet, dann bekommt er höchstens 4 Punkte.

7. a) erste Lösung		
Es gibt 4 Möglichkeiten drei nebeneinanderliegende Plätze auszuwählen: wir können nämlich eine der Dreiergruppen 1-2-3, 2-3-4, 3-4-5, 4-5-6 wählen.	1 Punkt	
Es gibt auch 4 Möglichkeiten drei, paarweise nicht nebeneinanderliegende Plätze auszuwählen: wir können eine der Dreiergruppen 1-3-5, 1-3-6, 1-4-6, 2-4-6 wählen.	1 Punkt	
Die Anzahl der günstigen Fälle (und auch die Anzahl aller Fälle) ist bei jeder Auswahl gleich,	1 Punkt	
so ist also die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse gleich.	1 Punkt	
Insgesamt: 4 Punkte		

7. a) zweite Lösung

Die drei Schützenstände können auf $\binom{6}{3}$ -Weise ausgewählt werden (wenn die Reihenfolge der Auswahl nicht betrachtet wird).	1 Punkt	Die drei Schützenstände können auf $6 \cdot 5 \cdot 4 (= 120)$ -Weise ausgewählt werden (die Reihenfolge wird betrachtet). In diesem Fall haben die Sportschützen $3!$ Reihenfolgen.
Es gibt 4 Möglichkeiten drei nebeneinanderliegende Plätze auszuwählen: wir können nämlich eine der Dreiergruppen 1-2-3, 2-3-4, 3-4-5, 4-5-6 wählen. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{4}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.	1 Punkt	$\frac{4 \cdot 3!}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{5}$
Es gibt auch 4 Möglichkeiten drei, paarweise nicht nebeneinanderliegende Plätze auszuwählen: wir können eine der Dreiergruppen 1-3-5, 1-3-6, 1-4-6, 2-4-6 wählen. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{4}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.	1 Punkt	$\frac{4 \cdot 3!}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{5}$
Die zwei Ereignisse sind also gleichwahrscheinlich.	1 Punkt	
Insgesamt:	4 Punkte	

7. b)

(Mit fünf Schüssen kann man höchstens 25 Punkte bekommen.) Es kann vorkommen, dass kein Punkt verloren wurde (1 Möglichkeit); oder es konnte ein Punkt verloren gehen, wenn man einmal 4, viermal 5 geschossen hat (1 Möglichkeit).	1 Punkt	Die Punktwerte der Schüsse in monoton steigender Reihenfolge ist: 55555; 45555;
Es kann vorkommen, dass 2 Punkte verloren wurden: wenn einmal 3 und viermal 5 oder zweimal 4 und dreimal 5 geschossen wurde (2 Möglichkeiten).	1 Punkt	35555; 44555;
Es kann vorkommen, dass 3 Punkte verloren wurden: wenn einmal 2 und viermal 5; oder einmal 3, einmal 4 und dreimal 5; oder dreimal 4 und zweimal 5 geschossen wurde (3 Möglichkeiten).	1 Punkt	25555; 34555; 44455.
Endre hat also insgesamt $1 + 1 + 2 + 3 = 7$ Möglichkeiten mindestens 22 Punkte zu bekommen.	1 Punkt	
Insgesamt:	4 Punkte	

7. c)		
Wenn die Spannweite 3 ist, dann gibt es unter den Schüssen eine 1 und keine 5, oder umgekehrt (also höchstens vier Punktzahlen kommen vor).	1 Punkt	
Wenn es einen einzigen Modus gibt (laut dem vorherigen Gedankengang), dann kommt er mindestens viermal vor, also es gibt mindestens viermal die 2 (aber sechsmal oder mehrmals kann die 2 wegen dem Median nicht mehr vorkommen).	1 Punkt	
Wenn es unter den Schüssen eine 1 und keine 5 gibt, dann sind die Punktzahlen 122224xxx4 mit der Betrachtung des Medians.	1 Punkt	
Daraus folgt die Möglichkeit 1222244444, aber es ist ein Widerspruch, denn der Modus ist nicht gleich 2 (oder der Durchschnitt ist nicht 3).	1 Punkt	
Also unter den Schüssen gibt es keine 1 und eine 5: 2222xxxxx5 ist die Reihenfolge der Punktzahlen. Laut dem Median sind die mittleren Werte 2-4 oder 3-3.	1 Punkt	
Im Fall 2-4 ist der Durchschnitt größer als 3 (denn die fehlenden drei Punktzahlen in der Reihenfolge 222224xxx5 sind mindestens 4), das ist ein Widerspruch.	1 Punkt	
Also die entsprechende Reihenfolge ist 222233xxx5. Dem Durchschnitt entsprechend ist die Summe der drei fehlenden Werte 11, und die 3 kann höchstens einmal vorkommen (die 2 ist der einzige Modus),	1 Punkt	
also 2222333445 ist die monoton steigende Reihenfolge der Punktzahlen (alle andere Fälle waren nicht entsprechend, so ist sie die einzige Möglichkeit).	1 Punkt	
Insgesamt:	8 Punkte	

Bemerkungen:

1. Ein Lösungsweg mit weniger Begründung (nicht so detailliert) kann auch akzeptiert werden.
2. Wenn nur die richtige Lösung (2222333445) ohne Begründung mitgeteilt wurde, dann werden 2 Punkte vergeben. Für die Überprüfung der Richtigkeit der mitgeteilten Lösung ist 1 Punkt zu geben. Es gibt 5 weitere Punkte für den Beweis der eindeutigen Lösung.

8. a)		
$p^2 + q^2 > p^2 - q^2$ gilt selbstverständlich.	1 Punkt	
Es muss gezeigt werden, dass $p^2 + q^2 > 2pq$ ist.	1 Punkt	
Eine Seite der Ungleichung auf Null reduziert bekommt man: $p^2 - 2pq + q^2 > 0$, also $(p - q)^2 > 0$,	1 Punkt	Die Ungleichung wird durch 2 geteilt, dann zieht man die Quadratwurzel zweier positiven Zahlen, so erhält man den Zusammenhang zwischen den quadratischen und geometrischen Mittel: $\sqrt{\frac{p^2 + q^2}{2}} > \sqrt{pq}$,
die richtig ist, weil $p \neq q$ ist. (Nur äquivalente Umformungen wurden durchgeführt.)	1 Punkt	
Insgesamt:	4 Punkte	

8. b)		
Die Summe der Quadrate der kleineren Seiten ist $(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = p^4 + 2p^2q^2 + q^4$.	2 Punkte	
Diese Summe kann man faktorisieren: $p^4 + 2p^2q^2 + q^4 = (p^2 + q^2)^2$, so ist sie gleich dem Quadrat der dritten Seite.	1 Punkt	
Laut der Umkehrung des Satzes von Pythagoras ist das Dreieck wirklich rechtwinklig.	1 Punkt	
Insgesamt:	4 Punkte	

8. c)		
Der Flächeninhalt des (rechtwinkligen) Dreiecks ist die Hälfte des Produktes der zwei Katheten (der kürzeren Seiten): $F = \frac{(p^2 - q^2) \cdot 2pq}{2} =$	1 Punkt	
$= p^3q - q^3p$ ist es wirklich.	1 Punkt	
Insgesamt:	2 Punkte	

8. d)

Die Formel $F = rs$ wird für die Bestimmung des Flächeninhaltes (F ist der Flächeninhalt, s ist die Hälfte des Umfangs, r ist der Radius des Inkreises des Dreiecks) verwendet.	1 Punkt	<i>Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung hervorkommt.</i>
$s = \frac{(p^2 + q^2) + (p^2 - q^2) + 2pq}{2} = p^2 + pq.$	1 Punkt	
$r = \frac{T}{s} = \frac{p^3q - q^3p}{p^2 + pq} = \frac{pq(p^2 - q^2)}{p(p + q)} =$	1 Punkt	
$= \frac{pq(p + q)(p - q)}{p(p + q)} = q(p - q),$	2 Punkte	
dieses Produkt ist wirklich eine ganze Zahl.	1 Punkt	
Insgesamt:	6 Punkte	

Bemerkung: Wenn der Kandidat genau hinweist (oder beweist), dass in einem rechtwinkligen Dreieck der Radius des Inkreises mit der Formel $r = \frac{a+b-c}{2}$ zu bestimmen ist, wobei a und b die Katheten und c die Hypotenuse sind, dann bekommt er 2 Punkte.

Mit der Verwendung der Formel $r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{p^2 - q^2 + 2pq - (p^2 + q^2)}{2} =$ (1 Punkt)

$= \frac{2pq - 2q^2}{2} = pq - q^2$ (2 Punkte), diese Differenz ist eine ganze Zahl (1 Punkt).

9. a)

$f'(x) = 2x$	1 Punkt	
$f'(a) = 2a = b$	1 Punkt	
$\int_a^{2a} f(x) = \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^{2a} = \frac{8a^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{7a^3}{3}$	2 Punkte	
$\frac{7a^3}{3} = 63$	1 Punkt	
So bekommt man $a = 3$, und daraus folgt $b = 2a = 6$.	2 Punkte	
Insgesamt:	7 Punkte	

9. b)		
$h(1) = 1 + p + r$ $h(2) = 4 + 2p + r$ $h(3) = 9 + 3p + r$ $h(4) = 16 + 4p + r$	1 Punkt	
Laut der Bedingung der arithmetischen Folge ist: $2h(3) = h(1) + h(4)$, also $18 + 6p + 2r = 17 + 5p + 2r$ gilt,	2 Punkte	
so bekommt man $p = -1$.	1 Punkt	
Laut der Bedingung der geometrischen Folge ist: $(h(2))^2 = h(1) \cdot h(4)$, also $(r + 2)^2 = r(r + 12)$ ($p = -1$ wurde eingesetzt) gilt.	2 Punkte	
$r^2 + 4r + 4 = r^2 + 12r$ $8r = 4$ $r = 0,5$	2 Punkte	
Probe: $h(x) = x^2 - x + 0,5$ $h(1) = 0,5; h(2) = 2,5; h(3) = 6,5; h(4) = 12,5$ Die Zahlen 0,5; 6,5; 12,5 sind wirklich die benachbarten Glieder einer arithmetischen Folge (die Differenz ist 6), die Zahlen 0,5; 2,5; 12,5 sind wirklich die benachbarten Glieder einer geometrischen Folge (der Quotient ist 5).	1 Punkt	
Insgesamt:	9 Punkte	