

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2025. május 6.

**MATEMATIKA
NÉMET NYELVEN**

**EMELT SZINTŰ
ÍRÁSBELI VIZSGA**

**JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI
ÚTMUTATÓ**

OKTATÁSI HIVATAL

Wichtige Hinweise

Formvorschriften:

1. Die Arbeit ist mit einem **andersfarbigen Stift**, als der Abiturient ihn benutzt hat, **lesbar** zu korrigieren.
2. In den Kästchen neben den Aufgaben steht zuerst die maximale Punktzahl. Der Korrektor trägt die von ihm gegebene **Punktzahl in das zweite Kästchen** ein.
3. **Bei einwandfreier Lösung** markieren Sie neben der maximalen Punktzahl mit Haken, dass Sie die Gedankeneinheit gesehen haben, und sie als richtig beurteilt haben.
4. Bei fehlerhaften oder mangelhaften Lösungen **markieren Sie den Fehler** und geben Sie bitte auch die **Teilpunkte** für die richtigen Schritte an. Wenn die Korrektur besser nachvollziehbar ist, dann dürfen auch die verlorenen Punkte markiert werden. Kein Teil darf in der Arbeit bleiben, wo nach der Korrektur nicht eindeutig ist, ob er richtig, falsch oder überflüssig ist.
5. Während der Korrektur **benutzen Sie die folgenden Bezeichnungen**:
 - richtiger Schritt: *Haken*
 - theoretischer Fehler: *zweimaliges Unterstreichen*
 - Rechenfehler oder sonstige, nicht theoretischer Fehler: *einmaliges Unterstreichen*
 - mit falschen Ausgangsdaten durchgeführter richtiger Schritt: *gestrichelter oder durchgestrichener Haken*
 - mangelhafte Begründung, mangelhaftes Aufzählen, andere Mängel: *Mangelzeichen*
 - nicht verständlicher Teil: *Fragezeichen und/oder Wellenlinie*
6. Mit **Bleistift** geschriebenen Teile außer Abbildungen dürfen nicht bewertet werden.

Inhaltliche Fragen:

1. Bei einigen Aufgaben sind verschiedene Lösungswege angegeben. Wenn eine von diesen **unterschiedlichen Lösungen** vorkommt, suchen Sie die gleichwertigen Teile und verteilen sie die Punkte entsprechend.
2. Die vorgeschriebenen Punktzahlen lassen sich weiter **zerlegen, es sei denn der Lösungsschlüssel erlaubt das nicht**, dürfen aber nur als ganze Punkte vergeben werden.
3. Wenn der Schüler einen **Rechenfehler** macht oder ungenau wird, bekommt er nur für den Teil keinen Punkt, wo der Fehler lag. Wenn er mit falschem Teilergebnis, aber mit richtigem Gedankengang weiterrechnet, und dadurch das zu lösende Problem sich nicht wesentlich verändert, sind die weiteren Teilpunkte zu gewähren.
4. Begeht der Schüler einen **theoretischen Fehler**, so bekommt er innerhalb einer Gedankeneinheit (diese wird in der Anweisung mit Doppellinie markiert) auch für die formell richtigen mathematischen Schritte keinen Punkt. Wenn der Schüler in einer folgenden Teilaufgabe oder Gedankeneinheit mit diesem falschen Ergebnis als Ausgangswert richtig weiterrechnet, dadurch aber das zu lösende Problem sich nicht wesentlich verändert, bekommt er die maximale Punktzahl für diesen neuen Teil.

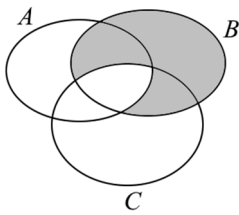
5. Wenn in der Anweisung eine **Bemerkung** in Klammern steht, dann kann die Lösung auch ohne diese mit voller Punktzahl bewertet werden.
6. **Ohne die Angabe der Maßeinheit** werden Punkte nur dann abgezogen, wenn die Maßeinheit in der Antwort oder bei der Umwandlung der Maßeinheit fehlt (ohne Klammern).
7. Bei mehreren Lösungen für eine Aufgabe ist **nur die eine zu bewerten, die der Schüler markiert hat**. Während der Korrektur markieren Sie eindeutig, welche Version bewertet wurde, welche nicht.
8. **Zusatzpunkte** (mehr Punkte als die vorgeschriebene maximale Punktzahl für die Aufgabe) sind **nicht zugelassen**.
9. Die Gesamtpunktzahl einer Aufgabe oder Teilaufgabe **darf nicht negativ sein**.
10. Es gibt **keinen Punktabzug** für Berechnungen und Schritte, die zwar falsch sind, aber vom Schüler bei der Lösung der Aufgabe nicht weiterverwendet werden.
11. Während der Aufgabenlösung kann man **den Gebrauch des Taschenrechners – ohne weitere mathematische Begründung – bei den folgenden Rechnungen akzeptieren**: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzieren, Wurzelziehen, Berechnen von $n!$, $\binom{n}{k}$, für die Ersetzung der Tabellen im Tafelwerk (sin, cos, tg, log und ihre Umkehrfunktionen), zur Angabe des Näherungswertes von den Zahlen π und e , zur Bestimmung der Lösungen einer auf Null reduzierten quadratischen Gleichung. Weiterhin darf man den Taschenrechner ohne mathematischen Begründung verwenden, wenn der Durchschnitt und die Streuung berechnet wird, es sei denn der Text der Aufgabe verlangt eindeutig die Nebenrechnungen dazu. **In anderen Fällen gelten die mit Taschenrechner durchgeführten Rechnungen als nicht begründete Schritte, für die keine Punkte verteilt werden können**.
12. Wenn **Abbildungen** als Beweise verwendet wurden (z.B. das Ablesen der Daten durch Messung), ist dies nicht akzeptabel.
13. Bei der Angabe von **Wahrscheinlichkeiten** (wenn der Text der Aufgabe nichts Anderes sagt) dürfen auch in Prozent angegebene richtige Lösungen akzeptiert werden.
14. Wenn der Text der Aufgabe keine Rundung vorschreibt, dann sind auch Teil- und Endergebnisse akzeptierbar, die vom Lösungsschlüssel abweichen aber **sinnvoll und richtig gerundet wurden**.
15. **Im Teil II sind aus den 5 Aufgaben nur Lösungen von 4 Aufgaben zu bewerten**. Der Abiturient hat die Nummer der Aufgabe, die nicht bewertet werden soll, in das entsprechende Kästchen – vermutlich – eingetragen. Dementsprechend wird die eventuell vorhandene Lösung für diese Aufgabe nicht korrigiert. Wenn die ausgewählte Aufgabe nicht eindeutig feststeht, und die Wahl der Aufgabe in der Arbeit nicht eindeutig zu sehen ist, dann ist die nicht zu bewertende Aufgabe automatisch die letzte Aufgabe der vorgegebenen Aufgabenreihe.

I.

1. a)		
$8 \cdot 2^x - 2^x + \frac{2^x}{2} = 60$	1 Punkt	
Beide Seiten werden mit 2 multipliziert: $16 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x + 2^x = 120.$	1 Punkt	$7,5 \cdot 2^x = 60$
Nach dem Zusammenfassen: $15 \cdot 2^x = 120.$	1 Punkt	
$2^x = 8 (= 2^3)$	1 Punkt	
(Die exponentielle Funktion ist eineindeutig, so ist) $x = 3.$	1 Punkt	
Probe durch Einsetzen oder mit Bezug auf Äquivalenz.	1 Punkt	
Insgesamt:	6 Punkte	

1. b)		
Aus der ersten Gleichung bekommt man: $y = 2x - 3.$	1 Punkt	$x = \frac{y+3}{2}$
Der Zusammenhang wird in die zweite Gleichung eingesetzt: $ 5x - 5 = 5.$	1 Punkt	$ y + 1 = 2$
Wenn $5x - 5 = 5$ ist, dann ist $x = 2,$	1 Punkt	<i>Wenn $y + 1 = 2$ ist, dann ist $y = 1,$</i>
dann ist $y = 1.$ (Also die eine Lösung ist das Zahlenpaar (2; 1).)	1 Punkt	<i>daraus folgt $x = 2.$</i>
Wenn $5x - 5 = -5$ ist, dann ist $x = 0,$	1 Punkt	<i>Wenn $y + 1 = -2$ ist, dann ist $y = -3,$</i>
dann ist $y = -3.$ (Also die andere Lösung ist das Zahlenpaar (0; -3).)	1 Punkt	<i>daraus folgt $x = 0.$</i>
Probe.	1 Punkt	
Insgesamt:	7 Punkte	

2. a)



2 Punkte

Insgesamt: 2 Punkte

2. b)

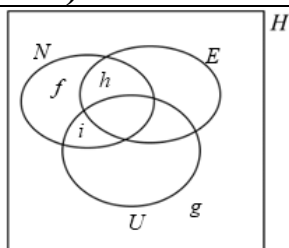
Zum Beispiel: $(A \cup B) \cap C$.

2 Punkte

$(A \cap C) \cup (B \cap C)$

Insgesamt: 2 Punkte

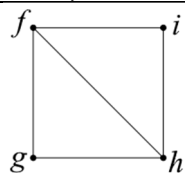
2. c)



jeweils
1 Punkt

Insgesamt: 4 Punkte

2. d)



3 Punkte

Für alle falsch gezeichnete Kanten oder fehlende Kanten wird jeweils 1 Punkt abgezogen.

Insgesamt: 3 Punkte

3. a)

Sei p der Preis einer Pizza mit Schinken in Ft, sei s der Preis vom Pfirsichsaft:

$$\left. \begin{array}{l} 2p + 3s = 7600 \\ 3p + 5s = 11\,700 \end{array} \right\}$$

1 Punkt

Die erste Gleichung wird nach p geordnet:
 $p = 3800 - 1,5s$.

1 Punkt

Das wird in die zweite Gleichung eingesetzt:
 $3(3800 - 1,5s) + 5s = 11\,700$,
daraus kommt $s = 600$ (also ein Pfirsichsaft kostet 600 Ft).

1 Punkt

*Aus das Doppelte der zweiten Gleichung wird das Dreifache der ersten Gleichung abgezogen:
 $s = 600$.*

So ist $p = 2900$ (also eine Pizza ist 2900 Ft).

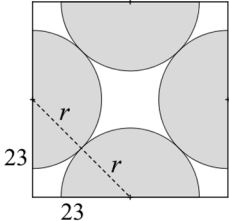
1 Punkt

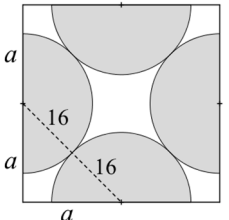
Probe anhand des Textes.

1 Punkt

Insgesamt: 5 Punkte

3. b)		
Sei $7x$ der Preis der Zutaten im vorigen Jahr in Ft, die anderen Kosten seien $3x$ (also die Gesamtkosten sind $10x$).	1 Punkt	
Dann sind die Gesamtkosten nach der Preiserhöhung: $1,15 \cdot 7x + 1,25 \cdot 3x =$	1 Punkt	
$= 11,8x$ Ft (das ist 1,18-Fache der ursprünglichen Gesamtkosten),	1 Punkt	
so ist eine Pizza heute um 18% teurer.	1 Punkt	
Insgesamt:	4 Punkte	

3. c) erste Lösung		
Wir berechnen den größten Durchmesser der Pizzas, die wir auf einem Backblech so platzieren können. In diesem Fall berühren die Halbkreise einander. Der Abstand der Mittelpunkte zweier solchen Halbkreise ist die Summe der Radien der Halbkreise.	1 Punkt	<i>Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung hervorkommt.</i>
(Sei r der Radius der Halbkreise: Laut dem Satz von Pythagoras: $(2r)^2 = 23^2 + 23^2$,	1 Punkt	
so bekommt man $2r (= 23\sqrt{2}) \approx 32,5$ cm.	1 Punkt	
Diese Zahl ist größer als 32 cm, deshalb passen die halben Pizzas von Péter auf dem Backblech.	1 Punkt	
Insgesamt:	4 Punkte	

3. c) zweite Lösung		
Wir bestimmen die Größe des Backblechs, was wir zur gewünschten Platzierung der zwei Pizzas mit dem Durchmesser 32 cm brauchen. In diesem Fall berühren die Pizzas einander. Der Abstand der Mittelpunkte zweier solchen Halbkreise ist die Summe der Radien der Halbkreise.	1 Punkt	<i>Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung hervorkommt.</i>
(Die Seite des Backblechs sei $2a$: Laut dem Satz von Pythagoras: $32^2 = a^2 + a^2$,	1 Punkt	
so bekommt man $a \approx 22,63$ cm.	1 Punkt	
$2a < 46$ cm ist, so haben die halben Pizzas genügend Platz auf dem Backblech.	1 Punkt	
Insgesamt:	4 Punkte	

4. a)		
Sei q der Quotient der geometrischen Folge: $732 \cdot q^2 = 1647$,	1 Punkt	<i>Laut dem Zusammenhang mit dem geometrischen Mittel ist die gesuchte Jahreszahl:</i> $x^2 = 732 \cdot 1647$.
daraus kommt (denn $q > 0$ ist) $q = 1,5$,	1 Punkt	
so ist die mittlere Jahreszahl ($732 \cdot 1,5 =$) 1098.	1 Punkt	$(x > 0$ ist, so ist) $x = 1098$.
Insgesamt:		3 Punkte

4. b)		
Wenn die Noten in steigender Reihenfolge gesetzt werden, dann ist der Median in zwei Fällen 4: Fall 1: die fünfte Note ist 3, die sechste Note ist 5; Fall 2: die fünfte und die sechste Noten sind 4.	1 Punkt*	<i>Fall 1:</i> _____ 3 5 _____ <i>Fall 2:</i> _____ 4 4 _____
Im ersten Fall würde die Note 5 fünfmal vorkommen. Der Durchschnitt ist 4, deshalb braucht man noch die Note 3 auch fünfmal. Das kann aber wegen dem einzigen Modus nicht vorkommen.	1 Punkt*	
Im zweiten Fall muss die Note 5 viermal vorkommen. Wenn die Anzahl der Note 5 weniger wäre, dann würde die Note 4 mindestens so vielmal vorkommen, also die 5 wäre nicht der einzige Modus.	1 Punkt*	Es kann _____ 4 4 5 5 5 5 sein.
Der Durchschnitt der zehn Noten ist 4, so ist ihre Summe 40, deshalb ist die Summe der vier kleinsten Noten $40 - 4 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = 12$.	1 Punkt	
Wenn die Note 4 unter den vier kleinsten Noten nicht vorkommt, dann ergibt sich die Summe 12 nur viermal aus der Note 3. Es ist aber wegen dem einzigen Modus nicht möglich.	1 Punkt	
Wenn die Note 4 noch einmal vorkommt (mehr Note 4 können wegen dem Modus nicht sein), dann gibt es für die anderen Noten nur eine Möglichkeit: 2, 3, 3.	1 Punkt	
Also die zehn Noten sind: 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5. (Diese Zahlen sind allen Bedingungen entsprechend.)	1 Punkt	
Insgesamt:		7 Punkte

*Bemerkung: Die mit * markierten 3 Punkte kann der Kandidat auch für den folgenden Gedankenweg bekommen.*

Wegen dem Modus ist die Anzahl der Note 5 mindestens drei, wegen dem Median höchstens fünf.	1 Punkt	
Wenn die Note 5 dreimal vorkommt, dann wäre die Summe der Noten höchstens $(3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 =)$ 34, was zu wenig ist (und so könnte der Durchschnitt nicht 4 sein).	1 Punkt	
Die Note 5 kann fünfmal auch nicht vorkommen, denn in diesem Fall bräuchten wir die Note 3 auch	1 Punkt	

fünfmal, um den Durchschnitt 4 zu bekommen. (Wegen dem Modus) ist es auch nicht möglich, so kommt die Note 5 genau viermal vor.		
---	--	--

4. c) erste Lösung

Es gibt 4 Möglichkeiten drei gleiche Sorten,	1 Punkt	
und 4 Möglichkeiten drei unterschiedliche Sorten auszuwählen.	1 Punkt	
Aus einer Sorte wählt man 1 und aus einer anderen Sorte noch 2, so hat er $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten zur Auswahl.	1 Punkt	$\binom{4}{2} \cdot 2$
Also: Bence hat insgesamt $4 + 4 + 12 = 20$ Möglichkeiten die drei Baumkuchen auszuwählen.	1 Punkt	
Insgesamt:	4 Punkte	

4. c) zweite Lösung

Aus 4 unterschiedlichen Baumkuchen müssen 3 so ausgewählt werden, dass ihre Reihenfolge nicht beachtet wird, und aus einer Sorte können mehrere gewählt werden.	1 Punkt	<i>Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung hervorkommt.</i>
Es geht um eine Kombination mit Wiederholung, wobei drei Objekte aus vier ausgewählt werden. Die Anzahl der Möglichkeiten zur Auswahl von Bence ist: $\binom{4+3-1}{3} =$	2 Punkte	
$= \binom{6}{3} = 20.$	1 Punkt	
Insgesamt:	4 Punkte	

Bemerkung: Wenn der Kandidat alle Möglichkeiten (geordnet, in logischer Reihenfolge) aufzählt, und anhand seiner Aufzählung richtig antwortet, dann bekommt er die volle Punktzahl.

II.

5. a)		
Die Differenz der arithmetischen Folge ist: $d = \frac{22-5}{10} = 1,7.$	1 Punkt	
Das erste Glied der Folge ist: $a_1 = 5 - 2 \cdot 1,7 = 1,6.$	1 Punkt	
Die Summe der ersten 100 Glieder der Folge ist: $S_{100} = \frac{2 \cdot 1,6 + 99 \cdot 1,7}{2} \cdot 100 = 8575.$	2 Punkte	$a_{100} = 1,6 + 99 \cdot 1,7 = 169,9$ $S_{100} = \frac{1,6 + 169,9}{2} \cdot 100 = 8575$
Insgesamt:	4 Punkte	

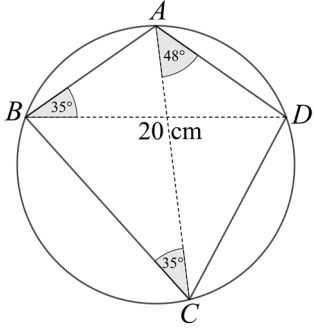
5. b)		
Die Summe der ersten n Glieder der arithmetischen Folge ist $S_n = \frac{2 \cdot 91 + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n = n^3.$	2 Punkte	$a_n = 91 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 89$ $S_n = \frac{91 + (2n + 89)}{2} \cdot n = n^3$
$(90 + n) \cdot n = n^3$ (Es wurden beide Seiten durch $n \neq 0$ geteilt, und eine Seite wurde auf Null reduziert:) $n^2 - n - 90 = 0.$	2 Punkte	
$n = -9$ ist keine richtige Lösung ($n > 0$).	1 Punkt	
$n = 10$ ist eine richtige Lösung ($S_{10} = 1000 = 10^3$, also die Bedingung wird erfüllt).	1 Punkt	
Insgesamt:	6 Punkte	

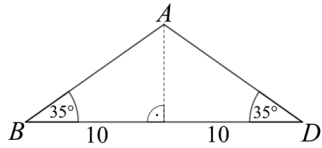
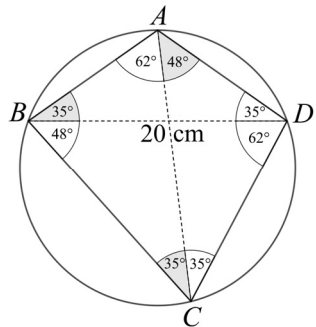
5. c)		
Die Summe der ersten n Glieder der geometrischen Folge ist $S_n = 1,6 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} > 1\,000\,000\,000.$	2 Punkte	
$2^n > 625\,000\,001$	1 Punkt	
Die Logarithmusfunktion zur Basis 2 ist streng monoton steigend,	1 Punkt	<i>Die Logarithmusfunktion zur Basis 10 ist streng monoton steigend, so ist</i>
so ist $n > \log_2 625\,000\,001 \approx 29,2.$	1 Punkt	$\lg 2^n > \lg 625\,000\,001$ $n \lg 2 > \lg 625\,000\,001$ ($\lg 2 > 0$, deshalb ist) $n > \frac{\lg 625\,000\,001}{\lg 2} \approx 29,2$
Also mindestens 30 Glieder müssen addiert werden.	1 Punkt	
Insgesamt:	6 Punkte	

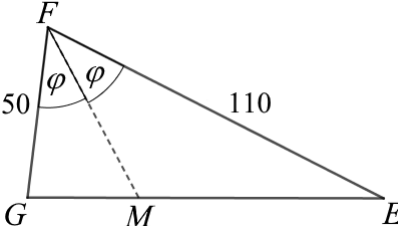
Bemerkungen:

1. Wenn der Kandidat statt einer Ungleichung mit einer Gleichung rechnet, dann bekommt er für die Lösung der Gleichung 4 Punkte. Wenn er sich danach auf die streng steigende Monotonie bezieht, und richtig antwortet, dann bekommt er die volle Punktzahl.

2. Wenn der Kandidat zeigt, dass der Fall $n = 29$ nicht entsprechend ist, **und** der Fall $n = 30$ die Bedingungen erfüllt, dann bekommt er 3 Punkte. Wenn er sich danach auf die streng steigende Monotonie bezieht, und richtig antwortet, dann bekommt er die volle Punktzahl.

6. a)		
 Laut dem Satz über die Umfangswinkel/Peripheriewinkel ist	1 Punkt	
$\angle ADB \simeq \angle ACB \simeq 35^\circ$ (beide Umfangswinkel gehören zum Bogen AB),	1 Punkt	
bzw. $\angle ABD \simeq \angle ACD \simeq 35^\circ$ (beide Umfangswinkel gehören zum Bogen AD).	1 Punkt	
Insgesamt:	3 Punkte	

6. b)		
(Das Dreieck ABD ist gleichschenkelig, die Basis BD ist 20 cm lang, deshalb ist) $AB = AD = \frac{10}{\cos 35^\circ} \approx 12,2 \text{ cm.}$	2 Punkte	
(Laut dem Satz über Umfangswinkel und Mittelpunktswinkel oder wegen der Innenwinkelsumme eines Dreiecks sind:) $\angle CAB \simeq 62^\circ, \angle DBC \simeq 48^\circ, \angle BDC \simeq 62^\circ.$	2 Punkte	
(Der Winkel $\angle BCD \simeq 70^\circ$ ist, so) im Dreieck BCD kann der Sinussatz angewendet werden: $\frac{BC}{20} = \frac{\sin 62^\circ}{\sin 70^\circ},$	1 Punkt	
daraus bekommt man $BC \approx 18,8 \text{ cm.}$	1 Punkt	
Mit dem Kosinussatz ist: $CD = \sqrt{20^2 + 18,8^2 - 2 \cdot 20 \cdot 18,8 \cdot \cos 48^\circ} \approx$	1 Punkt	Mit dem Sinussatz:
$\approx 15,8 \text{ cm.}$	1 Punkt	$\frac{CD}{20} = \frac{\sin 48^\circ}{\sin 70^\circ}$
	1 Punkt	$CD \approx 15,8 \text{ cm.}$
Der Umfang des Sehnenvierecks ist: $(12,2 + 12,2 + 18,8 + 15,8 =) 59 \text{ cm.}$	1 Punkt	
Insgesamt:	9 Punkte	

6. c)		
 (Sei M der Schnittpunkt der inneren Winkelhalbierenden vom Eckpunkt F und der Seite EG.) Laut dem Satz über die Winkelhalbierende gilt: $\frac{EM}{MG} = \frac{FE}{FG},$ daraus folgt (laut dem Dreisatz) $EM = \frac{104}{110 + 50} \cdot 110 = 71,5 \text{ cm.}$ So ist $MG = (104 - 71,5) = 32,5 \text{ cm.}$ (Die Winkelhalbierende teilt die Seite EG in Teilstrecken, die 71,5 cm bzw. 32,5 cm lang sind.)	1 Punkt	Die Seite EG wird laut dem Satz über die Winkelhalbierende im Verhältnis 110 : 50 geteilt,
	2 Punkte	
	1 Punkt	
Insgesamt:		4 Punkte

Bemerkung:

Wenn der Kandidat ohne Maßeinheiten antwortet, dann verliert er höchstens 1 Punkt.

7. a)		
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Anna mit ihrem ersten Wurf nicht gewinnt (und so kann Balázs würfeln), ist $\frac{5}{6}$,	1 Punkt	
danach gewinnt Balázs (unabhängig vom ersten Wurf von Anna) mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$,	1 Punkt	
so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit wirklich $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.	1 Punkt	
Insgesamt:		3 Punkte

7. b)		
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Anna mit ihrem ersten Wurf gewinnt, ist $\frac{1}{6}$.	1 Punkt	
Mit ihrem zweiten Wurf gewinnt Anna, wenn ihre beiden ersten Würfe keine Sechs sind, aber sie würfelt eine Sechs zweitens. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} (\approx 0,116)$.	1 Punkt	

Mit ihrem dritten Wurf gewinnt Anna, wenn sie und Balázs bei ihren ersten zwei Würfeln keine Sechs würfeln, aber Anna würfelt eine Sechs drittens. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6}$ ($\approx 0,080$).	1 Punkt	
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten, also: $\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{25}{36} + \frac{625}{1296}\right) \approx 0,363.$	1 Punkt	$\frac{2821}{7776}$
Insgesamt: 4 Punkte		

7. c) erste Lösung

(Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Anna mit ihrem ersten Wurf gewinnt, ist $\frac{1}{6}$, dass sie mit ihrem zweiten Wurf gewinnt, ist $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$, dass sie mit ihrem dritten Wurf gewinnt, ist $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6}$.) Und so weiter, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Anna mit ihrem n -ten Wurf gewinnt, ist $\left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2} \cdot \frac{1}{6}$ (n ist eine positive ganze Zahl).	1 Punkt	<i>Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung hervorkommt.</i>
Diese Wahrscheinlichkeiten sind die Folgeglieder einer geometrischen Folge, wobei das erste Glied $a_1 = \frac{1}{6}$ ist, und der Quotient $q = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$ ist.	2 Punkte	
Im Spiel können beliebig viele Würfe vorkommen, so muss die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe bestimmt werden (die Summe existiert, denn $0 < q < 1$ ist).	1 Punkt	<i>Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung hervorkommt.</i>
Die Wahrscheinlichkeit für den Sieg von Anna ist: $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{25}{36}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{36}} = \frac{6}{11} \approx 0,545.$	1 Punkt	
Insgesamt: 5 Punkte		

7. c) zweite Lösung

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Anna mit ihrem ersten Wurf gewinnt, ist $\frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weder Anna, noch Balázs zuerst eine Sechs würfeln, ist $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.	1 Punkt	
Wenn keiner von ihnen mit dem ersten Wurf gewonnen hat, dann kann es so betrachtet werden, dass das Spiel neu beginnt. In diesem Moment gewinnt Anna das Spiel mit derselben Wahrscheinlichkeit p , die sie auch am Anfangs des Spiels hatte.	1 Punkt	
So folgt: $p = \frac{1}{6} + \frac{25}{36} \cdot p$.	2 Punkte	
Davon bekommt man: $p = \frac{6}{11}$.	1 Punkt	
Insgesamt:	5 Punkte	

7. d)

Die Anzahl aller Fälle (die gleichwahrscheinlich sind) ist $6 \cdot 6 = 36$, wenn zwei Würfel geworfen werden. Von diesen Ergebnissen kommt die nicht größere Zahl 1, 2, 3, 4, 5, bzw. 6 in genau 11, 9, 7, 5, 3, bzw. 1 Fällen vor.							2 Punkte	<table><tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>6</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr></table>		1	2	3	4	5	6	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	2	3	1	2	3	3	3	3	4	1	2	3	4	4	4	5	1	2	3	4	5	5	6	1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6																																																			
1	1	1	1	1	1	1																																																			
2	1	2	2	2	2	2																																																			
3	1	2	3	3	3	3																																																			
4	1	2	3	4	4	4																																																			
5	1	2	3	4	5	5																																																			
6	1	2	3	4	5	6																																																			
<table><tr><td>die nicht größere Zahl ist</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>ihre Wahrscheinlichkeit ist</td><td>$\frac{11}{36}$</td><td>$\frac{9}{36}$</td><td>$\frac{7}{36}$</td><td>$\frac{5}{36}$</td><td>$\frac{3}{36}$</td><td>$\frac{1}{36}$</td></tr></table>	die nicht größere Zahl ist	1	2	3	4	5	6	ihre Wahrscheinlichkeit ist	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$																																											
die nicht größere Zahl ist	1	2	3	4	5	6																																																			
ihre Wahrscheinlichkeit ist	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$																																																			
Der gesuchte Erwartungswert ist: $\frac{11}{36} \cdot 1 + \frac{9}{36} \cdot 2 + \frac{7}{36} \cdot 3 + \frac{5}{36} \cdot 4 + \frac{3}{36} \cdot 5 + \frac{1}{36} \cdot 6 =$							1 Punkt																																																		
$= \frac{91}{36} \text{ (} \approx 2,528 \text{)}.$							1 Punkt																																																		
Insgesamt:							4 Punkte																																																		

8. a)		
B, D	2 Punkte	Bei einer richtigen Antwort, oder bei zwei richtigen Antworten und einer falschen Antwort ist 1 Punkt zu geben. In anderen Fällen ist keinen Punkt zu geben.
Insgesamt:		2 Punkte

8. b) erste Lösung		
(Es gibt drei Fälle, die Blumen in die Vasen zu stellen.) Fall 1: In einer Vase stehen 4 Blumen, in 2 Vasen jeweils eine Blume. Es gibt $\binom{6}{4} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = 30$ Möglichkeiten dafür, dass z.B. in der roten Vase 4 Blumen stehen, in der weißen und in der grünen Vase jeweils eine Blume steht.	1 Punkt	
Die 4 Blumen können aber in allen drei Vasen stehen, so gibt es $30 \cdot 3 = 90$ solche Möglichkeiten.	1 Punkt	
Fall 2: In einer Vase stehen 3 Blumen, in einer Vase 2 Blumen, und in einer Vase steht 1 Blume. Es gibt $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = 60$ Möglichkeiten dafür, dass z.B. in der roten Vase 3 Blumen, in der weißen Vase 2 Blumen stehen und in der grünen Vase eine Blume steht.	1 Punkt	
Es gibt $3! = 6$ Reihenfolgen für die Farben der Vasen, deshalb ergibt sich $60 \cdot 6 = 360$ solche Möglichkeiten.	1 Punkt	
Fall 3: In allen drei Vasen stehen jeweils 2 Blumen. Es gibt $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 90$ solche Möglichkeiten.	1 Punkt	
Also insgesamt gibt es $90 + 360 + 90 = 540$ Möglichkeiten die Blumen in die Vasen zu stellen.	1 Punkt	
Insgesamt:		6 Punkte

8. b) zweite Lösung		
Wenn leere Vasen erlaubt wären, dann hätten wir $3^6 = 729$ Möglichkeiten die Blumen in die Vasen einzustellen.	1 Punkt	
Es gibt 2^6 solche Fälle, wo die rote Vase leer ist. Unter diesen Möglichkeiten sind aber 2 Fälle, wo die anderen zwei Vasen auch leer sind. So ist z.B. nur die rote Vase in $2^6 - 2 = 62$ Fällen leer.	2 Punkte	

Jede Vase kann leer sein, also es gibt $3 \cdot 62 = 186$ solche Fälle, wo genau eine Vase leer ist.	1 Punkt	
Es gibt noch 3 Fälle, wo genau zwei Vasen leer sind (und so stehen alle 6 Blumen in einer Vase).	1 Punkt	
Also, die Anzahl der entsprechenden Anordnungen ist: $729 - 186 - 3 = 540$.	1 Punkt	
Insgesamt:	6 Punkte	

8. c) erste Lösung

(Sei r der Radius des Grundkreises, h ist die Höhe des Zylinders in cm gemessen.) So ist das Volumen des Zylinders: $V = r^2 \pi h = 2000 \text{ cm}^3$,	1 Punkt	
so ist die Höhe $h = \frac{2000}{r^2 \pi}$.	1 Punkt	
Die Oberfläche des Zylinders ohne Deckfläche ist: $A = r^2 \pi + 2r\pi h = r^2 \pi + 2r\pi \cdot \frac{2000}{r^2 \pi} = r^2 \pi + \frac{4000}{r}$.	1 Punkt	
Die Ableitungsfunktion der Funktion $f(r) = r^2 \pi + \frac{4000}{r}$ ($r > 0$) ist $f'(r) = 2r\pi - \frac{4000}{r^2}$.	1 Punkt*	
(Die Funktion f kann eine Minimumstelle haben, für die $f'(r) = 0$ ist, also) $2r\pi - \frac{4000}{r^2} = 0$.	1 Punkt*	
So bekommt man $r \left(= \sqrt[3]{\frac{2000}{\pi}} \right) \approx 8,6 \text{ cm}$.	1 Punkt*	
Da $f''(r) = 2\pi + \frac{8000}{r^3} > 0$ ist, so ist sie wirklich eine Minimumstelle.	1 Punkt*	Wenn $0 < r < 8,6$ ist, dann ist die erste Ableitung negativ, wenn $r > 8,6$ ist, dann ist sie positiv, so ist $r = 8,6$ die Minimumstelle.
Also die Höhe der Vase sollte $h = \frac{2000}{8,6^2 \pi} \approx 8,6 \text{ cm}$ sein.	1 Punkt	
Insgesamt:	8 Punkte	

*Bemerkung: Die mit * markierten 4 Punkte kann der Kandidat für den folgenden Gedankengang bekommen:*

Es wird der Zusammenhang zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel für die Glieder $r^2 \pi$, $\frac{2000}{r}$, $\frac{2000}{r}$ angewendet:	1 Punkt	
$f(r) = r^2 \pi + \frac{2000}{r} + \frac{2000}{r} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2000^2 \pi} \approx 697,5$.	1 Punkt	

Die zwei Terme werden genau dann gleich sein, wenn $r^2\pi = \frac{2000}{r}$ ist,	1 Punkt	
also $r \left(= \sqrt[3]{\frac{2000}{\pi}} \right) \approx 8,6$ cm ist.	1 Punkt	

8. c) zweite Lösung

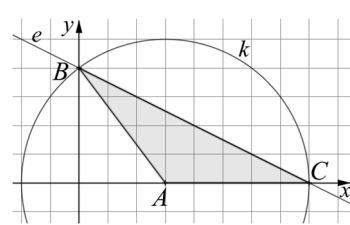
(Sei r der Radius des Grundkreises, h ist die Höhe des Zylinders in dm gemessen.) Das Volumen des Zylinders ist: $V = r^2\pi h = 2 \text{ dm}^3$,	1 Punkt	
so ist der Radius des Grundkreises $r = \sqrt{\frac{2}{\pi h}}$.	1 Punkt	
Die Oberfläche des Zylinders ohne Deckfläche ist: $A = r^2\pi + 2r\pi h = \frac{2}{\pi h} \cdot \pi + 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi h}} \cdot \pi h = \frac{2}{h} + 2\sqrt{2\pi h}$.	1 Punkt	
Die Ableitungsfunktion der Funktion $f(h) = \frac{2}{h} + 2\sqrt{2\pi h} \ (h > 0)$ ist $f'(h) = -\frac{2}{h^2} + \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{h}}$.	1 Punkt*	
(Die Funktion f kann eine Minimumstelle haben, für die $f'(h) = 0$ ist, also) $\frac{2}{h^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{h}}$.	1 Punkt*	
Beide Seiten werden quadriert: $\frac{4}{h^4} = \frac{2\pi}{h}$, so ist $h = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$.	1 Punkt*	
Da $f''(h) = \frac{4}{h^3} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^3}}$ ist, und $f''\left(\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}\right) = 2\pi - \frac{\pi}{2} > 0$ ist, so ist sie wirklich eine Minimumstelle.	1 Punkt*	
Also die Höhe der Vase sollte $h = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \approx 0,86$ dm = 8,6 cm sein.	1 Punkte	
Insgesamt: 8 Punkte		

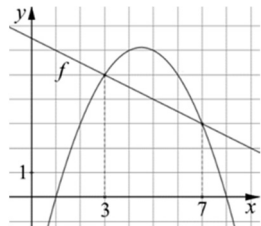
*Bemerkung: Die mit * markierten 4 Punkte kann der Kandidat für den folgenden Gedankengang bekommen:*

Es wird der Zusammenhang zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel für die Glieder $\frac{2}{h}$, $\sqrt{2\pi h}$, $\sqrt{2\pi h}$ angewendet:	1 Punkt	
---	---------	--

$f(h) = \frac{2}{h} + \sqrt{2\pi h} + \sqrt{2\pi h} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{4\pi} \approx 6,97.$	1 Punkt	
Die zwei Terme werden genau dann gleich sein, wenn $\frac{2}{h} = \sqrt{2\pi h}$ ist,	1 Punkt	
also $h = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$ ist.	1 Punkt	

9. a)

Der Eckpunkt C liegt auf der Kreislinie k um den Mittelpunkt A und mit dem Radius AB .	1 Punkt	<i>Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Gedanke nur aus der Lösung hervorkommt.</i>
Die Länge vom Radius AB ist $\sqrt{9+16} = 5$,	1 Punkt	
die Gleichung des Kreises k ist $(x-3)^2 + y^2 = 25$.	1 Punkt	
(Die gemeinsamen Punkte des Kreises k und der Geraden e sind die möglichen Eckpunkte C .) Aus der Gleichung e bekommt man: $x = 8 - 2y$. Es wird in die Gleichung von k eingesetzt: $(5-2y)^2 + y^2 = 25$. So ist $y^2 - 4y = 0$.	2 Punkte	$y = 4 - \frac{1}{2}x$ $(x-3)^2 + \left(4 - \frac{1}{2}x\right)^2 = 25$ $x^2 - 8x = 0$
$y = 4$ oder $y = 0$.	1 Punkt	$x = 0$ oder $x = 8$.
Wenn $y = 4$ ist, dann ist $x = 0$, also der Eckpunkt C ist $C(0; 4)$, aber er stimmt mit B überein. So können die drei Punkte kein Dreieck bilden, deshalb ist es keine Lösung.	1 Punkt	
Wenn $y = 0$ ist, dann ist $x = 8$, also der Eckpunkt C ist $C(8; 0)$, so ist er eine entsprechende Lösung. (A , B und C sind unterschiedliche Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen).	1 Punkt	
Insgesamt:	8 Punkte	

9. b)		
(Für die ersten Koordinaten des Schnittpunktes der Parabel und der Geraden f ist es gültig: $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 4 = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}.$	1 Punkt	
$x^2 - 10x + 21 = 0$	1 Punkt	
$x_1 = 3$ oder $x_2 = 7$.	1 Punkt	
Die Parabel liegt im Intervall $[3; 7]$ über der Geraden f .	1 Punkt	
So ist der gefragte Flächeninhalt: $F = \int_3^7 \left(\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 4 \right) - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{13}{2} \right) \right) dx =$ $= \int_3^7 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{21}{2} \right) dx =$	2 Punkte*	
$= \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{21}{2}x \right]_3^7 = -\frac{49}{6} - \left(-\frac{81}{6} \right) = \frac{16}{3}.$	2 Punkte*	
Insgesamt: 8 Punkte		

*Bemerkung: Die mit * markierten 4 Punkte kann der Kandidat für den folgenden Gedankengang bekommen:*

Der Flächeninhalt unter der Parabel ist: $\int_3^7 \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 4 \right) dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 4x \right]_3^7 =$ $= \frac{301}{12} - \frac{45}{12} = \frac{64}{3}.$	2 Punkte	
Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Trapezes ist: $\frac{5+3}{2} \cdot 4 = 16.$	1 Punkt	
Der Flächeninhalt der beschränkten Fläche, die von der Parabel und der Geraden f begrenzt wird, ist: $\frac{64}{3} - 16 = \frac{16}{3}.$	1 Punkt	