ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2011.

MATEMATIKA
SZLOVÁK NYELVEN

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI
ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI
ÚTMUTATÓ

NEMZETI ERŐFORRÁS
MINISZTÉRIUM

Dôležité pokyny

Formálne predpisy:

1. Písomnú prácu je treba opravovať **perom odlišnej farby** než akú použil skúšaný študent a podľa zvyklostí označovať chyby, nedostatky, atď.
2. Z obdĺžnikov nachádzajúcich sa vedľa príkladov je v prvom uvedený maximálny počet bodov na daný príklad, do vedľajšieho **obdĺžnika** sa napíše **počet bodov** daných opravujúcim.
3. V prípade **bezchybného riešenia** stačí napísať maximálny počet bodov do vhodného obdĺžnika.
4. V prípade neúplného/chybného riešenia prosíme, aby hodnotiaci napísal na úlohu aj jednotlivé **čiastkové bodové ohodnotenie**.
5. Mimo obrázkov ceruzkou písané časti opravujúci učiteľ nemôže hodnotiť.

Obsahové požiadavky:

1. V prípade jednotlivých úloh sme uviedli aj bodovanie viacerých riešení. Ak sa vyskytne od uvedených **odlišné riešenie**, vyhľadajte zodpovedajúce rovnocenné riešenie v častiach smernice, a na základe tohto bodujte.
2. Body bodovacej smernice sú ďalej **deliteľné**. Pridelené body môžu byť ovšem len celé body.
3. V prípade jednoznačne správneho myšlienkového postupu a výsledkov je možné dať maximálny počet bodov aj vtedy, ak popis je **menej rozvedený**.
4. Ak je v riešení **výpočtová chyba,** nepresnosť, potom len na tú časť neprislúcha bod, v ktorej žiak urobil chybu. Ak s chybným čiastkovým výsledkom žiak pokračuje ďalej so správnym myšlienkovým postupom, potom mu treba prideliť ďalšie čiastkové body.
5. V prípade **zásadnej myšlienkovej chyby** v rámci jednej myšlienkovej jednotky (tieto označuje v príručke dvojčiara) neprislúchajú body ani na formálne správne matematické kroky. Ak študent so zásadnou myšlienkovou chybou získaným výsledkom ako východiskovým údajom ďalej počíta správne v ďalšej myšlienkovej jednoke alebo čiastočnej otázke, potom na túto časť má dostať maximálny počet bodov.
6. Ak sa v opravnej príručke nachádza v zátvorke **poznámka** alebo **jednotka merania**, v prípade jej chýbania má riešenie úplnú hodnotu.
7. Z viacero pokusov riešenia jedného príkladu možno **hodnotiť len jedno, to riešenie, ktoré skúšaný označí**.
8. Za riešenie **bónusové body** (body prekračujúce maximálny počet bodov daných pre danú úlohu alebo časť úlohy) **nie je možné dať**.
9. Pre tie nesprávne čiastkové výpočty, čiastkové kroky **netreba strhnúť body**, ktoré skúšaný pri riešení príkladu v skutočnosti nepoužil.
10. **V prípade série skúšobných úloh v časti II.B z 3 príkladov je možné vyhodnotiť len riešenie 2 príkladov**. Skúšaný do štvorčeka slúžiaceho na tento účel – predpokladajúc – označil poradové číslo toho príkladu, ktorého vyhodnotenie nebude započítané do celkového počtu bodov. Tomuto odpovedajúc riešenie dané na tento príklad nie je potrebné ani opraviť. Keď nevysvitne jednoznačne, že skúšaný hodnotenie ktorého príkladu nežiada, potom bude automaticky v poradí posledný príklad ten, ktorý netreba vyhodnotiť.

I.

1.		
$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \left(= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\right)$.	2 body	*Body sú nedeliteľné.*
Spolu:	**2 body**	

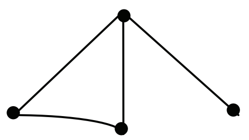
2.		
20 000 a 16 000.	2 body	*Keď vie, že 36000 treba rozdeliť na 9 rovnakých častí, dostáva 1 bod.*
Spolu:	**2 body**	

3.		
Za 8 dní sa 4-krát zdvojnásobní počet buniek (b),	1 bod	*Keď správne napíše prvé štyri členy postupnosti, prislúchajú tieto 2 body.*
$b = 5000 \cdot 2^4$.	1 bod	
$b = 80\ 000$.	1 bod	
Spolu:	**3 body**	

4.		
a) **N**;	1 bod	*Body prislúchajú pri udaní správnej odpovede v hociakej podobe.*
b) **Z**;	1 bod	
c) $\emptyset$.	1 bod	
Spolu:	**3 body**	

5.		
$a = 2$.	1 bod	
$b = -3$.	1 bod	
Spolu:	**2 body**	

6.		
Medián je: 7.	2 body	*Body sú nedeliteľné.*
Spolu:	**2 body**	

7.		
Správne udaný graf je napr. 	2 body	*Body sú nedeliteľné.*
Spolu:	**2 body**	

8.		
$d = -3$	1 bod	
$a_{50} = a_1 + 49d$	1 bod	
$a_1 = 176$	1 bod	
Spolu:	**3 body**	

9.		
B)	2 body	*Body sú nedeliteľné.*
Spolu:	**2 body**	

10.		
B)	2 body	*Body sú nedeliteľné.*
Spolu:	**2 body**	

11.		
$2000 \cdot 1{,}06^x = 4024$.	1 bod	*Keď táto myšlienka vysvitne v priebehu výpočtu, aj tak prislúcha bod.*
Výpočet x $\lg 2000 + x \lg 1{,}06 = \lg 4024$ $x = \dfrac{\lg 4024 - \lg 2000}{\lg 1{,}06} \approx 11{,}998$.	2 body	*Keď výpočtom kalkulačkou udá z roka na rok sumu a zistí 12 rokov, aj toto je plnohodnotný výpočet.*
Za 12 celých rokov.	1 bod	
Spolu:	**4 body**	

12.		
Dve stranové uhlopriečky vychádzajúce z jedného vrcholu vytvárajú s treťou uhlopriečkou spájajúcou ich koncové body pravidelný trojuholník,	2 body	*Za správne zakreslenú uhlopriečku prislúcha 1 bod.*
hľadaný uhol je preto 60°-vý.	1 bod	
Spolu:	**3 body**	

II. A

13. a)

Hodnota odmocniny môže byť len nezáporné číslo: $x \leq 5$,	1 bod*	
A len nezáporné číslo má odmocninu: $\lvert x\rvert \geq \sqrt{35{,}5}$.	1 bod*	
Pri umocnení na druhú: $x^2 - 10x + 25 = 2x^2 - 71$.	1 bod	
Po usporiadaní: $x^2 + 10x - 96 = 0$,	1 bod	
reálne korene čoho sú –16 a 6.	1 bod	
To druhé nezodpovedá prvej podmienke, preto nie je riešením rovnice. Jediným riešením rovnice je -16, lebo zodpovedá obom podmienkam, a pri daných podmienok sme previedli len ekvivalentné premeny..	1 bod*	*Body označené *-kou dostane aj vtedy, keď nevyriekne podmienky, ale dosadením určí, ktoré z dvoch koreňov je riešením pôvodnej rovnice.*
Spolu:	**6 bodov**	

13. b)

Na ľavej strane po dosadení $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ dostaneme: $1 - \cos^2 x = 1 + 2\cos x$.	1 bod	
$\cos^2 x + 2\cos x = 0$;	1 bod	
$\cos x(\cos x + 2) = 0$.	1 bod	
Keď $\cos x = 0$, potom $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbf{Z}$.	2 body	*Keď riešenie udá v napísanej podobe, ale nenapíše, že k je členom ktorej množiny, alebo udá ako periódu 2π, dostáva 1 bod. Keď riešenie udá v podobe $x = 90° + k \cdot 180°\ (k \in \mathbf{Z})$ alebo stupne a radiány miešane vystupujú v riešení, tak na túto časť dostáva 1 bod. Keď zanechá periódu (napr. odpoveď je $x = 90°$), tak nedostáva bod.*
Rovnica $\cos x + 2 = 0$ nemá riešenie (lebo $\cos x = -2$ neexistuje).	1 bod	
Spolu:	**6 bodov**	
Poznámka: Keď rovnicu vyrieši pomocou vzorca pre riešenie rovníc druhého stupňa, aj tak prislúcha plný počet bodov.		

14. a)		
Spomenutú odpoveď dalo 18,75% - aspoň 40 ročných osôb.	1 bod	*Keď táto myšlienka vysvitne počas výpočtov, aj tak prislúcha bod.*
Z 80–tich 18,75% je: $80 \cdot 0{,}1875$.	1 bod	
Teda 15, najmenej 40 ročných osôb dalo odpoveď „menej ako 5.	1 bod	
Spolu:	**3 body**	

14. b)		
Z mladších ako 40 rokov $120 \cdot 0{,}35 = 42$,	1 bod	
z najmenej 40 ročných $80 \cdot 0{,}375 = 30$,	1 bod	
teda spolu je 72 takých osôb, ktorí chodia do divadla 5-10-krát ročne.	1 bod	
Toto číslo je 36 % opýtaných.	1 bod	
Spolu:	**4 body**	

14. c) prvé riešenie		
Počet možných všetkých výberov je: $\binom{200}{2}$ (= 19 900).	1 bod	
Sú dve osoby mladšie ako 40 rokov medzi vybranými: v $\binom{120}{2}$ (= 7140) prípadoch.	1 bod	
Pravdepodobnosť toho, že dve vybrané osoby sú mladšie ako 40 rokov: $\dfrac{\binom{120}{2}}{\binom{200}{2}} \left(= \dfrac{7140}{19\,900} \approx 0{,}359\right)$.	1 bod	
Pravdepodobnosť komplementárnej udalosti: $1 - \dfrac{\binom{120}{2}}{\binom{200}{2}} \left(= \dfrac{12\,760}{19\,900}\right)$.	1 bod	
Teda 0,641 je pravdepodobnosť toho, že medzi vybranými je nanajvýš jedna osoba mladšia ako 40 rokov.	1 bod	*Keď nezaokrúhli na tri desatinné miesta, alebo nesprávne zaokrúhli, tento bod neprislúcha.*
Spolu:	**5 bodov**	

14. c) **druhé riešenie**		
Počet všetkých možných výberov je: $\binom{200}{2}$ (= 19 900).	1 bod	
Z týchto náhodne vybrané obe najmenej 40 ročné osoby: v $\binom{80}{2}$ (= 3160) prípadoch,	1 bod	
Rôzneho veku: v $80\cdot 120$ (= 9600) prípadoch.	1 bod	
Pravdepodobnosť opýtanej udalosti: $\dfrac{\binom{80}{2}+80\cdot 120}{\binom{200}{2}}\left(=\dfrac{12\ 760}{19\ 900}\right)$.	1 bod	
Teda 0,641 je pravdepodobnosť toho, že medzi vybranými je nanajvýš 1 osoba mladšia ako 40 rokov.	1 bod	*Keď nezaokrúhli na tri desatinné miesta, alebo nesprávne zaokrúhli, tento bod neprislúcha.*
Spolu:	**5 bodov**	

15. a) **prvé riešenie**		
((Súradnice bodu *P* dáva riešenie sústavy dvoch rovníc určujúcich dané dve priamky.) Z prvej rovnice: $y = 2{,}5x + 7{,}25$.	1 bod	
Po dosadení do druhej rovnice a po usporiadaní: $x = -1{,}5$.	1 bod	
$y = 3{,}5$.	1 bod	
Teda *P*(–1,5; 3,5).	1 bod	
Spolu:	**4 body**	

15. a) **druhé riešenie**		
(Súradnice bodu *P* dáva riešenie sústavy dvoch rovníc určujúcich dané dve priamky.) $10x - 4y = -29$ $10x + 25y = 72{,}5$ $29y = 101{,}5$	1 bod	
$y = 3{,}5$	1 bod	
$x = -1{,}5$.	1 bod	
Teda *P*(–1,5; 3,5).	1 bod	
Spolu:	**4 body**	

Poznámka: Správne znázornenie dvoch priamok: 1-1 bod. Správne prečítanie súradníc priesečníka (–1,5; 3,5) dvoch správne znázornených priamok je 1 bod, kontrola týchto dosadením je 1 bod.

15. b) **prvé riešenie**		
Normálové vektory priamok $\mathbf{n}_e(5;-2)$ a	1 bod	
$\mathbf{n}_f(2;5)$.	1 bod	
Skalárny súčin normálových vektorov: $\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}_f = 5\cdot 2 + (-2)\cdot 5 = 10 - 10 = 0$.	1 bod	*Tieto 2 body prislúchajú aj vtedy, keď sa skúšaný odvoláva na to, že dva normálové vektory sú vzájomným otočením o 90°-ov.*
Teda dve priamky sú kolmé.	1 bod	
Spolu:	**4 body**	

15. b) **druhé riešenie**		
Strmosť priamok je: $m_e = \frac{5}{2}$,	1 bod	
$m_f = -\frac{2}{5}$.	1 bod	
Súčin strmostí je –1 ,	1 bod	
teda dve priamky sú kolmé.	1 bod	
Spolu:	**4 body**	

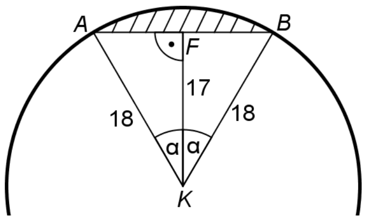
15. c)		
Strmosť priamky *e* je 2,5; teda pre uhol α ktorý zviera s osou *x* platí, že $\mathrm{tg}\,\alpha = 2{,}5$.	3 body	
Z toho $\alpha \approx 68{,}2°$.	1 bod	
Spolu:	**4 body**	

II. B

16. a)		
$M = -4{,}42 + \frac{2}{3}\lg\left(1{,}344 \cdot 10^{14}\right)$	1 bod	
$M \approx 5$	2 body	*Hociktorú hodnotu medzi 4,9 a 5 možno prijať.*
Spolu:	**3 body**	

16. b)		
$9{,}3 = -4{,}42 + \frac{2}{3}\lg E$.	1 bod	
$\lg E = 20{,}58$.	1 bod	
Teda množstvo vyslobodenej energie je $E \approx 3{,}8 \cdot 10^{20}$ (J).	1 bod	
Spolu:	**3 body**	

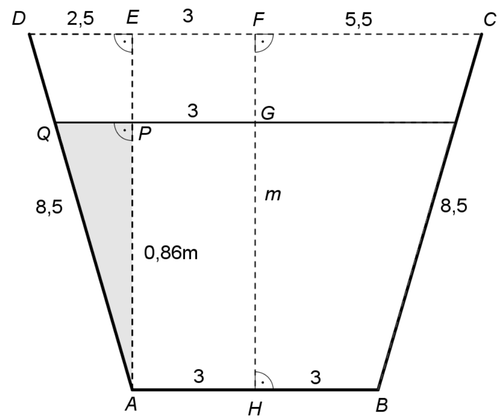
16. c)		
Intenzita čilského zemetrasenia bola o 2 väčšia, ako kanadského: $-4{,}42 + \frac{2}{3} \cdot \lg E_C = -4{,}42 + \frac{2}{3} \cdot \lg E_K + 2$.	1 bod	
Po usporiadaní: $\lg E_C - \lg E_K = 3$.	1 bod	
(Použitím totožností logaritmu) $\lg \frac{E_C}{E_K} = 3$.	1 bod	
Z toho $\frac{E_C}{E_K} = 1000$.	1 bod	
Vyslobodená energia bola 1000 násobkom.	1 bod	
Spolu:	**5 bodov**	

16. d)		
Použijeme označenie obrázku.  Z pravouhlého trojuholníka *AKF*: $\cos\alpha = \frac{17}{18}$,	1 bod	
$\alpha \approx 19{,}2°$. ($2\alpha \approx 38{,}4°$.)	1 bod	*Možno prijať aj $\alpha \approx 19°$.*
$T_{AKB\Delta} \approx \frac{18^2 \cdot \sin 38{,}4°}{2}$ ($\approx 100{,}6$ km^2).	1 bod	*Keď použije nesprávne vzorec vzťahujúci sa na plochu kruhového odseku z tabuľky funkcií, môže dostať nanajvýš 1 bod.*
$T_{kruh.výseku} \approx 18^2 \pi \cdot \frac{38{,}4°}{360°}$ ($\approx 108{,}6$ km^2).	1 bod	
$T_{kruh.odseku} \approx 108{,}6 - 100{,}6 = 8$ (km^2).	1 bod	
Plocha zničeného územia je približne 8 km^2.	1 bod	
Spolu:	**6 bodov**	

17. a)		
Spolu: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$,	2 body	
teda 840 štvorciferných čísiel možno vytvoriť.	1 bod	
Spolu:	**3 body**	

17. b)		
Z prvých päť číslic môže byť hociktoré z čísiel 1, 2, 3, 4, 5, to je spolu $5^5 (= 3125)$ možností.	2 body	
Posledné dve číslice, kvôli deliteľnosti so 4-mi môžu byť z nasledujúcich piatich prípadov jedno: 12, 24, 32, 44, 52.	2 body	*Keď udá 4 dobré možnosti (a zlé nie), alebo vedľa piatich správnych možností je jedno nesprávne, prislúcha 1 bod, v prípade inej nesprávnej odpovede bod neprislúcha.*
Spolu $5^5 \cdot 5$,	1 bod	
teda možno vytvoriť 15625 sedemciferných čísiel.	1 bod	
Spolu:	**6 bodov**	

17. c)		
Všetky z čísiel 1, 2, 3, 4, 5 vystupujú v šesťcifernom čísle, z nich jedno presne dvakrát.	1 bod	*Keď táto myšlienka vysvitne počas výpočtov, aj tak prislúcha bod.*
Len číslo 3 môže byť to, ktoré vystupuje dvakrát,	1 bod	
lebo súčet čísiel musí byť deliteľný tromi,	1 bod	
a $1+2+3+4+5=15$ (čo je deliteľné tromi).	1 bod	
Miesto oboch číslic 3 môžeme vybrať $\binom{6}{2}$- spôsobmi.	1 bod	*Počet kusov vhodných 6-ciferných čísiel sa rovná počtu všetkých permutácií charakterov 1; 2; 3; 3; 4; 5 teda* $\frac{6!}{2!}=360.$
Na zvyšné 4 miesta môžeme napísať 4! spôsobmi ostatné čísla.	1 bod	
Z vhodných šesťciferných čísiel je $\binom{6}{2}\cdot 4!$,	1 bod	
teda 360 kusov.	1 bod	
Spolu:	**8 bodov**	

18 a)		
 Príprava obrázku, udanie údajov.	1 bod	*Keď je riešenie správne aj bez obrázku, prislúcha bod.* *Keď skúšaný s udanými priemermi počíta ako s polomermi, bod nedostáva.*
Zrezaný kužeľ má výšku m cm. (Kvôli symetrie) $ED = 2{,}5$ cm.	1 bod	
Z pravouhlého trojuholníka AED ($AD = 8{,}5$; $AE = m$): $m^2 = 8{,}5^2 - 2{,}5^2$, $m \approx 8{,}1$.	1 bod	
86% tohoto: $0{,}86m \approx 7{,}0$.	1 bod	
Trojuholníky APQ a AED sú podobné (oba sú pravouhlé a majú jeden spoločný ostrý uhol);	1 bod	
pomer podobností (pomer dĺžky vhodných strán) je 0,86.	1 bod	*Keď táto myšlienka vysvitne počas výpočtov, aj tak prislúcha bod.*
Preto $PQ = 0{,}86 \cdot DE$, teda $PQ = 0{,}86 \cdot 2{,}5 = 2{,}15$.	1 bod	*Aj zaokrúhlenie $PQ \approx 2{,}2$ možno prijať.*
Polomer rovinného rezu: $GQ = 3 + 2{,}15 = 5{,}15$.	1 bod	*Aj $GQ \approx 5{,}2$ možno prijať.*
Objem smotany: $V \approx \frac{7{,}0 \cdot \pi}{3} \cdot \left(5{,}15^2 + 3^2 + 5{,}15 \cdot 3\right)$.	1 bod	
$V \approx 372{,}9$ (cm^3).	1 bod	
Objem smotany zaokrúhlený na desať cm^3 je 370 cm^3.	1 bod	*Tento bod prislúcha aj vtedy, keď počíta s $GQ \approx 5{,}2$ a preto na objem smotany – po správnom zaokrúhlení - dostane 380 cm^3.*
Spolu:	**11 bodov**	

18. b) **prvé riešenie**		
Počítame s komplementárnym prípadom.	1 bod	*Tento bod dostane aj vtedy, keď myšlienka vyplýva len z výpočtov.*
Pravdepodobnosť výberu poškodenej škatule je 0,03; preto pravdepodobnosť výberu dobrej škatule je 0,97.	1 bod	
Pravdepodobnosť toho, že kontrolór nenájde nepodarok je $0{,}97^{10}$.	2 body	
Teda pravdepodobnosť toho, že nájde nepodarok je $1 - 0{,}97^{10}$ ($\approx 0{,}2626$).	1 bod	
Hľadaná pravdepodobnosť zaokrúhlená na dve desatinné miesta je 0,26.	1 bod	*Keď pravdepodobnosť udá skúšaný v percentách (26%, respektíve 26,26%), aj tak prislúcha bod..*
Spolu:	**6 bodov**	

18. b) **druhé riešenie**		
Pravdepodobnosť výberu poškodenej škatule je 0,03; preto pravdepodobnosť výberu dobrej škatule je 0,97.	1 bod	
Nech je $P(k)$ pravdepodobnosť toho, že medzi vybranými 10-mi škatuľami je k kusov nepodarkov. $P(1) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97^9 \approx 0{,}228$; $P(2) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}03^2 \cdot 0{,}97^8 \approx 0{,}032$; $P(3) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}03^3 \cdot 0{,}97^7 \approx 0{,}003$; $P(4) = \binom{10}{4} \cdot 0{,}03^4 \cdot 0{,}97^6 \approx 0{,}0001$. V každom prípade $5 \le k \le 10$ bude každá pravdepodobnosť menšia ako 0,00001, teda súčet týchto neovplyvňuje hodnotu zaokrúhlenú na 2 desatinné miesta.	3 body	*1 bod prislúcha, keď aspoň v jednom prípade správne použije vzťah na binomiálne rozdelenie (správne dosadí). 1 bod prislúcha, keď vie, že treba vyšetriť 10 prípadov. Úplný počet bodov (3 body) môže dostať, keď pri použití hore uvedeného myšlienkového postupu dostane správne odpoveď, respektíve správne napíše všetkých 10 prípadov.*
Hľadaná pravdepodobnosť je približne $0{,}228 + 0{,}032 + 0{,}003 = 0{,}263$;	1 bod	
zaokrúhlená na dve desatinné miesta je 0,26.	1 bod	
Spolu:	**6 bodov**	