ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2013. május 7.

MATEMATIKA SZLOVÁK NYELVEN

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Dôležité pokyny

Formálne predpisy:

1. Písomnú prácu je treba opravovať **perom odlišnej farby** než akú použil skúšaný študent a podľa zvyklostí označovať chyby, nedostatky, atď.
2. Z obdĺžnikov nachádzajúcich sa vedľa príkladov je v prvom uvedený maximálny počet bodov na daný príklad, do vedľajšieho **obdĺžnika** sa napíše **počet bodov** daných opravujúcim.
3. V prípade **bezchybného riešenia** stačí napísať maximálny počet bodov do vhodného obdĺžnika.
4. V prípade neúplného/chybného riešenia prosíme, aby hodnotiaci napísal na úlohu aj jednotlivé **čiastkové bodové ohodnotenie**.
5. Mimo obrázkov ceruzkou písané časti opravujúci učiteľ nemôže hodnotiť.

Obsahové požiadavky:

1. V prípade jednotlivých úloh sme uviedli aj bodovanie viacerých riešení. Ak sa vyskytne od uvedených **odlišné riešenie**, vyhľadajte zodpovedajúce rovnocenné riešenie v častiach smernice, a na základe tohto bodujte.
2. Body bodovacej smernice sú ďalej **deliteľné**. Pridelené body môžu byť ovšem len celé body.
3. V prípade jednoznačne správneho myšlienkového postupu a výsledkov je možné dať maximálny počet bodov aj vtedy, ak popis je **menej rozvedený**.
4. Ak je v riešení **výpočtová chyba,** nepresnosť, potom len na tú časť neprislúcha bod, v ktorej žiak urobil chybu. Ak s chybným čiastkovým výsledkom žiak pokračuje ďalej so správnym myšlienkovým postupom, potom mu treba prideliť ďalšie čiastkové body.
5. **V** prípade **zásadnej myšlienkovej chyby** v rámci jednej myšlienkovej jednotky (tieto označuje v príručke dvojčiara) neprislúchajú body ani na formálne správne matematické kroky. Ak študent so zásadnou myšlienkovou chybou získaným výsledkom ako východiskovým údajom ďalej počíta správne v ďalšej myšlienkovej jednoke alebo čiastočnej otázke, potom na túto časť má dostať maximálny počet bodov.
6. Ak sa v opravnej príručke nachádza v zátvorke **poznámka** alebo **jednotka merania**, v prípade jej chýbania má riešenie úplnú hodnotu.
7. Z viacero pokusov riešenia jedného príkladu možno **hodnotiť len jedno, to riešenie, ktoré skúšaný označí**.
8. Za riešenie **bónusové body** (body prekračujúce maximálny počet bodov daných pre danú úlohu alebo časť úlohy) **nie je možné dať**.
9. Pre tie nesprávne čiastkové výpočty, čiastkové kroky **netreba strhnúť body**, ktoré skúšaný pri riešení príkladu v skutočnosti nepoužil.
10. **V prípade série skúšobných úloh v časti II.B z 3 príkladov je možné vyhodnotiť len riešenie 2 príkladov.** Skúšaný do štvorčeka slúžiaceho na tento účel – predpokladajúc – označil poradové číslo toho príkladu, ktorého vyhodnotenie nebude započítané do celkového počtu bodov. Tomuto odpovedajúc riešenie dané na tento príklad nie je potrebné ani opraviť. Keď nevysvitne jednoznačne, že skúšaný hodnotenie ktorého príkladu nežiada, potom bude automaticky v poradí posledný príklad ten, ktorý netreba vyhodnotiť.

I.

1.		
Zlomok, ktorý sme dostali po zjednodušení: $\frac{a-2b}{3}$.	2 body	*Tieto 2 body sú nedeliteľné.*
Spolu:	**2 body**	

2.		
Vznikne rotačný valec, polomer kruhu základne je 5 cm, výška 12 cm.	1 bod	*Keď tieto myšlenky sú znázornené na obrázku, prislúha 1 bod.*
$V = 25\pi \cdot 12$ (cm^3).	1 bod	
Objem rotačného valca je $300\pi\,\text{cm}^3$.	1 bod	*Aj odpoveď udaná v tvare desatinného zlomku je plnohodnotná.*
Spolu:	**3 body**	

3.		
Počet skutočných koreňov: 1.	2 body	*Keď je odpoveď x=5, prislúcha 1 bod. Keď je odpoveď 5, je to 0 bodov.*
Spolu:	**2 body**	

4.		
$x_1 = 14,\ x_2 = -14$	2 body	*Každá správna odpoveď je po 1 bode.*
Spolu:	**2 body**	

5.		
Polohový vektor stredu: $\vec{f} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.	1 bod	
Po usporiadaní: $\vec{b} = 2\vec{f} - \vec{a}$.	1 bod	
Spolu:	**2 body**	

6.		
Hľadaný najmenší kladný uhol je 30º.	2 body	*Za zapísanie $750^o = 2\cdot 360^o + 30^o$ prislúcha 1 bod.*
Spolu:	**2 body**	

7.		
$x^2 + 18x + 81 = (x+9)^2$	1 bod	
Druhá mocnina čísla je vtedy najmenšia, keď umocníme 0 na druhú. Funkcia má najmenšiu hodnotu pri $x = -9$.	1 bod	
Spolu:	**2 body**	

8.		
Päťciferných kladných čísiel je 2^4=16.	2 body	
Spolu:	**2 body**	

9.		
I. Skupina je 180 osôb, II. skupina je 240 osôb, III. skupina je 300 osôb.	1-1 bod	
Spolu:	**3 body**	

10.		
Rovnicu usporiadame do tvaru $2x-7y=0$.	1 bod	
Jeden normálový vektor priamky *e* kolmej na túto priamku je **n** (7 ; 2),	1 bod	
takto rovnica priamky *e* je $7x + 2y = 33$.	1 bod	*Použitie rovníc priamok v hociktorom správnom tvare má úplnú hodnotu.*
Spolu:	**3 body**	

11.		
A: pravdivý; B: nepravdivý; C: pravdivý; D: pravdivý.	1-1 bod	
Spolu:	**4 body**	

12.		
Napíšeme členy radu: $a_1=-1,\quad a_2=1,\quad a_3=0,\quad a_4=1,\quad a_5=1,\quad a_6=2$.	2 body	
Takto $S_6=4$.	1 bod	
Spolu:	**3 body**	

II. A

13. a)		
Strana štvorca je a, a strany obdĺžnika sú a, respektíve $\frac{a}{3}$.	1 bod	*Keď toto označenie vyplýva z obrázku, prislúcha tento bod.*
Obvod jedného obdĺžnika je $2a+\frac{2a}{3}=24$,	2 bod	
z toho $a=9$ cm.	1 bod	
Plošný obsah štvorca je 81 cm^2.	1 bod	
Spolu:	**5 bodov**	

13. b) prvé riešenie		
Podľa Pythagorovej vety $13^2-12^2=x^2$ (alebo 13,12, 5 je Pythagorova trojica čísiel),	1 bod	
odvesna (BP) pravouhlého trojuholníka je 5 cm.	1 bod	
Plochu trojuholníka možno napísať dvomi spôsobmi: $T=\frac{a\cdot b}{2}=\frac{c\cdot m_c}{2}$,	2 body	
z čoho $a\cdot b=c\cdot m_c$,	1 bod	
teda $m_c=\frac{a\cdot b}{c}=\frac{60}{13}$.	1 bod	
Výška patriaca k prepone má dĺžku 4,6 cm.	1 bod	
Spolu:	**7 bodov**	

13. b) druhé riešenie		
Podľa Pythagorovej vety $13^2-12^2=x^2$ (alebo 13,12, 5 je Pythagorova trojica čísiel),	1 bod	
odvesna (BP) pravouhlého trojuholníka je 5 cm.	1 bod	
Podľa vety o odvesne $5=\sqrt{13\cdot p}$,	2 body	
$p=\frac{25}{13}\approx 1{,}92$.	1 bod	
Pomocou Pythagorovej vety $m_c^{\,2}=5^2-\left(\frac{25}{13}\right)^2$	1 bod	
Výška patriaca k prepone má dĺžku 4,6 cm.	1 bod	
Spolu:	**7 bodov**	

13. b) tretie riešenie		
V pravouhlom trojuholníku *ABP* označujeme uhol pri vrchole A α a pätu výšky patriacej k prepone AP bodom Q. V pravouhlom trojuholníku *ABP* $\cos\alpha = \frac{AB}{AP} = \frac{12}{13}$.	2 body	
$\alpha \approx 22{,}62°$.	1 bod	*Tento bod prislúcha aj vtedy, keď hodnotu* $\sin\alpha$ *neskôr vypočíta správne.*
V pravouhlom trojuholníku *AQB* $\sin\alpha = \frac{BQ}{AB} = \frac{BQ}{12}$.	2 body	
$BQ = 12\cdot\sin\alpha \approx 12\cdot 0{,}3846 \approx 4{,}6152$.	1 bod	
Výška patriaca k prepone má dĺžku 4,6 cm.	1 bod	
Spolu:	**7 bodov**	

14. a)		
Definičný obor: $\left(kvôli 2x-5>0 \text{ a } x>0\right)\ x > \frac{5}{2}$.	1 bod	*Keď pracuje s následkovou rovnicou a získaný koreň kontroluje dosadením, prislúcha tento bod.*
(Poučitím totožností logaritmu) $2x-5 = \frac{x}{3}$.	2 body	
Po usporiadaní rovnice $x = 3$.	1 bod	
Získaný koreň je prvkom definičného oboru, teda je riešením.	1 bod	
Spolu:	**5 bodov**	

14. b)		
$0 \le 13 - 2x$, takto $x \le 6{,}5$.	1 bod	*Keď pracuje s následkovou rovnicou a získané korene prekontroluje dosadením, vylúči nepravdivý koreň, tieto body prislúchajú.*
$0 \le \sqrt{13-2x} = x-5$, z toho $5 \le x$. Teda rovnica môže mať riešenie len v prípade $5 \le x \le 6{,}5$.	1 bod	
Obe strany umocníme na druhú: mocnina ľavej strany $13 - 2x$.	1 bod	
Mocnina pravej strany: $x^2 - 10x + 25$.	1 bod	
Rovnica druhého stupňa, ktorú treba vyriešiť: $0 = x^2 - 8x + 12$.	1 bod	
Z toho $x = 6$ alebo $x = 2$.	1 bod	
Jediné reálne riešenie rovnice na základnej množine je 6.	1 bod	
Spolu:	**7 bodov**	

15. a)		
Obe vzdelania má 20 osôb,	1 bod	
lebo počet diplomov, dokazujúcich vzdelanie je 42+28=70, čo je o 20 viac, ako počet získajúcich diplom (pracujúcich).	1 bod	*Tento bod prislúcha aj pri vyhotovení správneho množinového obrazu.*
Takto len vzdelanie technika má 22 osôb.	1 bod	
Spolu:	**3 body**	

15. b)		
Keď je počet pracovníkov mladších ako 30 rokov *x*,	1 bod	*Keď táto myšlienka vysvitne len v priebehu riešenia, tento bod prislúcha.*
tak je priemer: $\frac{x \cdot 148000 + (50 - x) \cdot 173000}{50} = 165\,000.$	1 bod	
$x = 16$	1 bod	
V laboratóriu pracuje 16 pracovníkov mladších ako 30 rokov.	1 bod	
Spolu:	**4 body**	

15. c)		
Zaplatia účastnícky poplatok pre 5 pracovníkov.	1 bod	
Všetky prípady: $\binom{25}{5}$,	1 bod	
Počet priaznivých prípadov: $\binom{17}{5}$.	1 bod	
(Použitím klasického modelu pravdepodobnosti:) $\dfrac{\binom{17}{5}}{\binom{25}{5}} = \dfrac{6188}{53130} \approx 0{,}1165.$	1 bod	
0,12 (respektíve 11,65%) je pravdepodobnosť toho, že vyberú 5 žien.	1 bod	
Spolu:	**5 bodov**	

II. B

16. a)		
Pre tretiu stranu trojuholníka c platí, že (kvôli trojuholníkovej nerovnosti) $20+c>22$	1 bod	
a $c<20+22$ nerovnosti musia byť splnené.	1 bod	
Takto $2<c<42$.	1 bod	
Keď aj tretia strana je celé číslo, najmenšia hodnota c môže byť *3*, najväčšia môže byť 41.	1 bod	
Toto znamená 39 vhodných trojuholníkov.	1 bod	
Spolu:	**5 bodov**	

16. b)		
(Uhol, ktorý zvierajú udané strany má označenie γ) $88=\frac{20\cdot 22\cdot \sin\gamma}{2}$.	1 bod	
Z toho $\sin\gamma = 0{,}4$.	1 bod	
$\gamma_1 \approx 23{,}6^\circ$	1 bod	
$\gamma_2 \approx 156{,}4^\circ$	1 bod	
Spolu:	**4 body**	

16. c)		
V prípade $\gamma_1 \approx 23{,}6^\circ$ môžeme tretiu stranu (c_1) vypočítať kosínovou vetou.	1 bod	*Keď táto myšlienka vysvitne len v priebehu riešenia, tento bod prislúcha.*
$c_1^2 \approx 20^2+22^2-2\cdot 20\cdot 22\cdot\cos 23{,}6^\circ$	1 bod	
$c_1^2 \approx 77{,}568$,	1 bod	
z toho má dĺžku $c_1 \approx 8{,}8$ jednotiek.	1 bod	
V prípade $\gamma_2 \approx 156{,}4^\circ$ je dĺžka tretej strany (c_2): $c_2^2 \approx 20^2+22^2-2\cdot 20\cdot 22\cdot\cos 156{,}4^\circ$.	1 bod	
$c_2^2 \approx 884-880\cdot(-0{,}9164)$, teda $c_2^2 \approx 1690{,}4$ a z toho	1 bod	
má dĺžku $c_2 \approx 41{,}1$ jednotiek.	1 bod	
Tretia strana trojuholníka môže mať dĺžku $\approx 8{,}8$ jednotiek alebo $\approx 41{,}1$ jednotiek.	1 bod	
Spolu:	**8 bodov**	*Keď počíta len s jedným prípadom, na túto časť môže dostať maximum 4 body.*

17. a)		
Cena nájomného Gábora rastie podľa geometrického radu, $a_1 = 100$ a $a_{24} = 200$.	1 bod	
$100 \cdot q^{23} = 200$, $q^{23} = 2$ (kde $q = 1 + \frac{p}{100}$)	1 bod	
$q = \sqrt[23]{2} = 2^{\frac{1}{23}}$ $(\approx 1{,}0306)$	1 bod	
$p = 3{,}06$,	1 bod	
Teda Gábor musí mesačne platiť o 3,06% viac nájomného.	1 bod	
Spolu:	**5 bodov**	

17. b)		
Cena nájomného Petra rastie podľa aritmetického radu, $b_1 = 100$ és $b_{24} = 200$,	1 bod	
$200 = 100 + 23 \cdot d$	1 bod	
$d = \frac{100}{23} \approx 4{,}35$, mesačné zvýšenie je 4,35 toliarov.	1 bod	
Spolu:	**3 body**	

17. c)		
Súčet prvých 24 členov radov je:	1 bod	*Keď táto myšlienka vysvitne len v priebehu riešenia, tento bod prislúcha.*
$S_{Gábor} = 100 \cdot \frac{\left(\sqrt[23]{2}\right)^{24} - 1}{\sqrt[23]{2} - 1} \approx 3468{,}45$.	2 body	
$S_{Peter} = \frac{100 + 200}{2} \cdot 24 = 3600$.	2 body	
Peter zaplatí o 132 toliarov viac nájmného za 24 mesiacov, ako Gábor.	1 bod	
Spolu:	**6 bodov**	
Keď mesačné nájomné znázorníme graficky, vidieť, že Peter by zaplatil každý mesiac viac nájomného, ako Gábor (okrem 1. a 24. mesiaca). Preto je jasné, že Peter by zaplatil za 24 mesiacov viac nájomného ako Gábor. Za správnu myšlienku, vyplývajúcu z jasne udaných grafov, možno dať 3 body.		

17. d)		
Peter za prvých 12 mesiacov zaplatí $S_{12} = \dfrac{2\cdot 100 + 11\cdot \dfrac{100}{23}}{2}\cdot 12 \approx 1487$ toliarov nájomného	1 bod	
za druhých 12 mesiacov 2113 toliarov.	1 bod	
$\dfrac{2113}{1487} \approx 1{,}421$, teda Peter v druhom roku zaplatí o 42,1% viac nájomného ako v prvom roku.	1 bod	
Spolu:	**3 body**	

18. a) prvé riešenie		
Keď neberieme do úvahy, že tieto dva druhy tovaru nemôžu byť vedľa seba, šesť druhov tovaru možno vyložiť v 6! poradiach.	1 bod	
Keď sa tieto dva druhy tovaru dostanú vedľa seba, ale ich poradie nerozlíšime, vyloženie tovaru je možné 5! spôsobmi.	1 bod	
Keď rozlíšime aj poradie týchto dvoch tovarov: šesť tovarov môžeme vyložiť 2.5! spôsobmi.	1 bod	
Počet priaznyvých poradí dostaneme, keď zo všetkých prípadov odčítame počet tých poradí, v ktorých sa strúhanka a krupica dostanú vedľa seba: $6!-2\cdot 5!$.	2 body	*Aj pri menej rozvinutom myšlienkovom postupe prislúchajú tieto 2 body.*
Teda doplňovač tovaru môže týchto šesť druhov tovaru vyložiť v 480 poradiach.	1 bod	
Spolu:	**6 bodov**	*Keď neberie do úvahy, že tieto dva druhy tovaru sa nemôžu dostať vedľa seba, môže dostať nanajvýš 1 bod.*

18. a) druhé riešenie		
Len krupicu a strúhanku by bolo možné vyložiť $6\cdot 5$, teda v 30-ich poradiach, keby sa mohli dostať aj vedľa seba.	1 bod	
Dva druhy tovaru sa môžu dostať vedľa seba v 5 prípadoch, keď ich poradie neberieme do úvahy,	1 bod	
ale kvôli tomu, že aj poradie treba brať do úvahy, preto v 10 prípadoch.	1 bod	
Takto môže vyložiť tieto dva druhy tovaru v (30-10) = 20-tich poradiach tak, aby sa nedostali vedľa seba.	1 bod	
Vo všetkých 20-tich prípadoch ostatné štyri druhy tovaru môže vyložiť 4! spôsobmi.	1 bod	
Teda šesť druhov tovaru môže vyložiť v $20\cdot 4! = 480$–tich poradiach.	1 bod	
Spolu:	**6 bodov**	

18. b)		
Spolu objednali 325 (=176+109+40) kusov chleba a 42 kusov poslali späť,	1 bod	
toto je 12,9% objednaného množstva.	1 bod	
Spolu objednali 695 (=314+381) kusov pečiva a 34 kusov poslali späť,	1 bod	
toto je 4,9% objednaného množstva.	1 bod	
Spolu:	**4 body**	

18. c)		
Počet predaného pečiva jednotlivé dni bolo: 124; 133; 132; 122; 150 kusov.	1 bod	
Dva dni môžeme označiť $\binom{5}{2}$ - spôsobmi.	1 bod	
(3 dni predali aspoň 130 kusov.) Želané dva dni možno vybrať $\binom{3}{2}$- spôsobmi,	1 bod	
takto hľadaná pravdepodobnosť je $\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = 0{,}3$	1 bod	
Spolu:	**4 body**	

18. d)		
Objednali 1 kg- vého bieleho chleba ($\frac{155}{5} =$) 31 kusov, ½ kg- vého bieleho chleba ($\frac{95}{5} =$) 19 kusov, z ražného chleba ($\frac{33}{5} =6{,}6$) 7 kusov,	2 body	*Dve správne odpovede je 1 bod, pre jednu správnu odpoveď nedostáva bod.*
a objednali 58 žemlí a 68 rohlíkov.	1 bod	
Spolu:	**3 body**	