ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2017. május 9.

MATEMATIKA
SPANYOL NYELVEN

KÖZÉPSZINTŰ
ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI
ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Información importante

Cuestiones formales para la corrección del examen:

1. Por favor, corrija el examen de forma **legible** y con un **bolígrafo de diferente color** al utilizado por el alumno.
2. En los recuadros grises de puntuación, el primero indica la máxima puntuación que se puede dar y el **recuadro** de al lado recoge los **puntos** que ha dado el profesor que corrige.
3. **En caso de que no haya errores en la resolución,** además de asignar los puntos máximos, por favor, indique que ha seguido el razonamiento de la resolución y lo considera correcto utilizando el signo de visto bueno.
4. Si hay errores o faltan pasos, por favor, escriba junto a los **signos utilizados para cada tipo de error, los puntos correspondientes a cada parte**. O, si en la corrección del examen resulta más claro escribir los puntos que ha perdido el alumno en el ejercicio, también se puede hacer así. No deben quedar partes en la resolución que, después de ser corregidas, no sea evidente si son correctas, erróneas o innecesarias.
5. Durante la corrección, **utilice los siguientes signos**:
   - paso correcto: *visto bueno (pipa)*
   - error de aplicación teórica: *doble subrayado*
   - error de cálculo u otro error que no sea de carácter teórico: *subrayado simple*
   - partir de datos equivocados pero realizar todos los pasos correctamente: *visto bueno discontinuo o tachado por la mitad*
   - ausencias de explicación, de enumeración u otras: *signo de ausencia*
   - partes que no se pueden entender: *interrogación o línea ondulada*
6. No se evalúan las **partes que estén escritas a lápiz** a excepción de los dibujos.

Cuestiones de contenido:

1. En algunos ejercicios, les hemos ofrecido la puntuación correspondiente a varias resoluciones. Si usted encuentra **otra resolución,** busque, por favor, las partes equivalentes de las resoluciones que propone la guía y reparta los puntos según dichas partes.
2. **Se pueden dividir** aún más los puntos que la guía recomienda, a menos que la guía no lo indique de otra manera. Pero, en cualquier caso, los puntos que se den siempre serán enteros.
3. Si en una parte de la resolución, el estudiante comete **un error de cálculo** o de precisión, únicamente no recibirá los puntos correspondientes a esta parte donde ha cometido el error. Si al arrastrar este error, el resto de los pasos realizados son correctos y no cambia el sentido del problema, entonces se puntuarán el resto de los pasos.
4. En caso de **un error de aplicación teórica**, dentro de un razonamiento en la resolución (los razonamientos distintos aparecen separados con una línea doble en la guía), no se pueden dar puntos ni siquiera por los pasos matemáticamente correctos hechos tras cometer el error. Pero si en el siguiente razonamiento, se sigue trabajando bien, a pesar del resultado incorrecto causado por dicho error, se darán los puntos máximos para las siguientes partes de la resolución del problema, si no ha cambiado el sentido del mismo.

5. Si en la guía, algún **comentario** o una **unidad de medida** está entre paréntesis, la solución será totalmente correcta aunque no se escriba.
6. Si se escriben varios intentos correctos para resolver un ejercicio, sólo se puntuará uno de ellos, el que **el alumno examinado haya indicado como válido**. En la corrección, debe indicarse claramente cuál fue la resolución que recibió puntos y cuál no.
7. **No se pueden dar puntos extra** (que excedan los puntos máximos que se pueden dar para el ejercicio o una parte de él).
8. La puntuación total asignada a un ejercicio o una parte de él **no puede ser negativa**.
9. **No se restan puntos** si aparecen errores en algún paso o en partes de la resolución que el alumno no utiliza después para resolver el ejercicio.
10. En el desarrollo de los pasos, **el uso de la calculadora – sin otras explicaciones matemáticas – se puede aceptar para el cálculo de las siguientes operaciones:** sumas, restas, productos, divisiones, potencias, raíces, n!, números combinatorios $\binom{n}{k}$, cálculo de valores de estas funciones (sen, cos, tg, log y sus inversas) sin necesidad de emplear las tablas del libro de fórmulas, para dar los valores aproximados de π y el número *e*, para calcular las raíces de la ecuación general de segundo grado. Se pueden calcular la media y la desviación típica con la calculadora sin otros razonamientos matemáticos en aquellos casos en los que no se puede deducir del enunciado del ejercicio que sea necesario indicar el desarrollo de los cálculos. **En otros casos en los que los cálculos se realicen solo con la calculadora, sin indicar los pasos explicativos intermedios, no recibirá puntos.**
11. No se puede aceptar el uso de **dibujos** con carácter demostrativo (por ejemplo, lectura de datos midiendo en el dibujo).
12. En los resultados de las **probabilidades**, se puede aceptar la respuesta correcta expresada en tanto por ciento (si el enunciado del ejercicio no lo exige de otra manera).
13. Si en el enunciado de un ejercicio no se pide aproximar obligatoriamente, entonces se puede aceptar como resultado de una parte o resultado final del ejercicio una **aproximación correcta y razonada** distinta a la propuesta en la guía.
14. **De los tres ejercicios propuestos en la parte II. B del examen solo se pueden puntuar dos.** Probablemente el estudiante habrá indicado el número del ejercicio eliminado, el que no se puntuará, en el cuadrado correspondiente. Si el alumno hubiera resuelto este ejercicio no habría que corregirlo. Si no queda claro cuál es el ejercicio que el alumno examinado no desea que se le corrija, entonces automáticamente, según el orden en que aparecen los ejercicios, no se corregirá el último.

I.

1.		
$x_1 = -2$	1 punto	
$x_2 = 0$	1 punto	
Total:	**2 puntos**	

2.		
(23 + 19 – 29 =) 13 alumnos irían encantados a ambos festivales.	2 puntos	
Total:	**2 puntos**	

3.		
10111	2 puntos	
Total:	**2 puntos**	

4.		
En total contamos 2 + 3 + 4 + 3 + 2 = 14 apretones de manos,	1 punto	*Estos 2 puntos también se asignan por el dibujo de un grafo adecuado.*
pero entonces contaríamos cada apretón dos veces.	1 punto	
Luego el número de apretones de manos es 7.	1 punto	
Total:	**3 puntos**	

5.		
$x = 16$	2 puntos	
Total:	**2 puntos**	

6.		
$x = -1$	2 puntos	
Total:	**2 puntos**	

7.		
C	2 puntos	
Total:	**2 puntos**	

Observación: Si el alumno, además de la respuesta correcta indica otra incorrecta, entonces recibe 1 punto.

8.		
La base del prisma es un triángulo regular cuya área mide $\frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ (= $4 \cdot \sqrt{3} \approx 6{,}93$ cm^2).	2 puntos	
El volumen del prisma es $4 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \approx$	1 punto	
$\approx 27{,}7$ cm^3.	1 punto	
Total:	**4 puntos**	

9.		
$x \geq -1{,}6$	2 puntos	
Total:	**2 puntos**	

10.		
A: verdadera B: falsa C: verdadera	2 puntos	*Por dos respuestas correctas recibe 1 punto, por una, recibe 0 puntos.*
Total:	**2 puntos**	

11.		
$A \cap B \cap C = \{d;\, e;\, f\}$	2 puntos	
$(A \cup B) \setminus C = \{a;\, b;\, h\}$	2 puntos	
Total:	**4 puntos**	

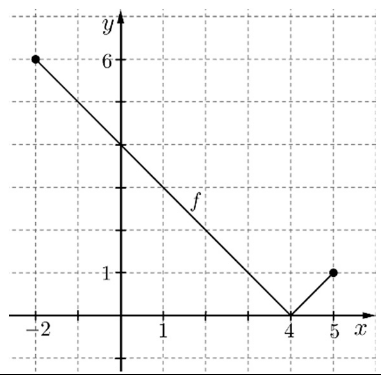
12.		
El número de los posibles resultados al lanzar dos dados es 36 (casos posibles).	1 punto	
El producto de los números obtenidos puede ser 9 solo de una forma ($3 \cdot 3$).	1 punto	
La probabilidad que se pregunta es $\frac{1}{36}$ $(= 0{,}02\dot{7})$.	1 punto	
Total:	**3 puntos**	

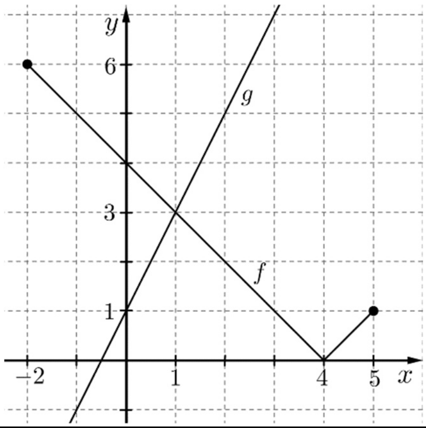
II. A

13. a) primer método		
De la primera ecuación viene que $y = 1 - 3x$,	1 punto	*De la segunda ecuación $x = 12 - 2y$.*
sustituyéndola en la segunda ecuación: $x + 2 - 6x = 12$.	1 punto	$36 - 6y + y = 1$
De donde $x = -2$,	1 punto	
e $y = 7$.	1 punto	
Comprobación (por ejemplo sustituyendo en ambas ecuaciones).	1 punto	
Total:	**5 puntos**	

13. a) segundo método		
Multiplicamos la primera ecuación por dos y restamos la segunda: $5x = -10$.	2 puntos	*De la primera ecuación restamos el triple de la tercera:* $-5y = -35$.
De ahí $x = -2$,	1 punto	
e $y = 7$.	1 punto	
Comprobación (por ejemplo sustituyendo en ambas ecuaciones).	1 punto	
Total:	**5 puntos**	

13. b)		
$2 \cdot 5^x + 3 \cdot 5 \cdot 5^x = 425$	1 punto	
Después de sumar se obtiene $17 \cdot 5^x = 425$,	1 punto	
de donde $5^x = 25$.	1 punto	
(Por la biyectividad de la función exponencial) $x = 2$.	1 punto	
Comprobación a partir de la sustitución o aludiendo a las ecuaciones equivalentes.	1 punto	
Total:	**5 puntos**	

14. a)		
La gráfica de la función se obtiene a partir de la gráfica del valor absoluto,	1 punto	
tiene un mínimo en el lugar $x = 4$ y vale 0,	1 punto	
y está limitada al intervalo dado.	1 punto	
Total:	**3 puntos**	

14. b) primer método		
Representamos la función g en el mismo sistema de coordenadas: 	2 puntos	
Se puede leer en la gráfica la primera coordenada del punto de intersección, $x = 1$.	1 punto	
Comprobar con la sustitución: $f(1) = g(1) = 3$.	1 punto	
Total:	**4 puntos**	

14. b) segundo método		
(Resolviendo la ecuación $\lvert x-4\rvert = 2x+1$) (en el intervalo: $-2 \le x < 4$) $-x+4 = 2x+1$,	1 punto	
de donde $x = 1$, que es una solución posible (por ejemplo comprobando con la sustitución).	1 punto	
(en el intervalo: $4 \le x \le 5$) $x-4 = 2x+1$,	1 punto	
de donde $x = -5$, que no puede ser solución del ejercicio.	1 punto	
Total:	**4 puntos**	

14. c) primer método		
Los números que hay que sumar constituyen los 46 primeros términos de una progresión aritmética,	1 punto	*Estos 2 puntos también se darán si estos razonamientos se deducen solo a partir de la resolución.*
cuyo primer término equivale al término 5º de la progresión original y su diferencia es 2.	1 punto	
El 5º término de la progresión original es: $(3+4\cdot 2=)\ 11$.	1 punto	
La suma que se pide: $\dfrac{2\cdot 11+45\cdot 2}{2}\cdot 46 =$	1 punto	
$= 2576$.	1 punto	
Total:	**5 puntos**	

14. c) **segundo método**		
La suma de los 50 primeros términos de la progresión: $\frac{2 \cdot 3 + 49 \cdot 2}{2} \cdot 50 =$	1 punto	
$= 2600$.	1 punto	
La suma de los cuatro primeros términos: $(3 + 5 + 7 + 9 =)$ 24.	1 punto	
La suma que se pide corresponde a la diferencia de estas dos sumas $2600 - 24 =$	1 punto	
$= 2576$.	1 punto	
Total:	**5 puntos**	

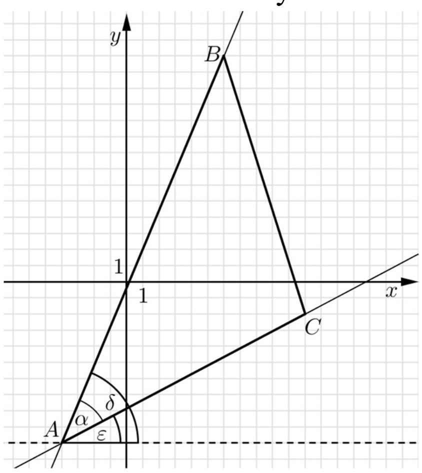
Observación: Si el alumno enumera todos los términos de la progresión y los suma, obteniendo así la respuesta correcta, entonces recibirá la puntuación total.

15. a) **primer método**		
El punto medio del lado *AC* es (3,5; −6),	1 punto	
El punto medio del lado *BC* es (8,5; 6).	1 punto	
La longitud de la base media que se pregunta es $\sqrt{(8{,}5 - 3{,}5)^2 + (6 - (-6))^2} =$	1 punto	
$= 13$.	1 punto	
Total:	**4 puntos**	

15. a) **segundo método**		
El lado *AB* mide $\sqrt{(6 - (-4))^2 + (14 - (-10))^2} =$	1 punto	
$= 26$.	1 punto	
La longitud de la base media es la mitad del lado paralelo a ella,	1 punto	*También se dará este punto, si esta explicación se deduce únicamente de la resolución.*
es decir, 13.	1 punto	
Total:	**4 puntos**	

15. b)		
La altura relativa al lado *AB* pasa por el vértice *C* y es perpendicular al lado *AB*,	1 punto	*También se dará este punto, si esta explicación se deduce únicamente de la resolución.*
por tanto, un vector normal es $\overrightarrow{AB}$ (10; 24).	2 puntos	**n**(5; 12)
Una de las ecuaciones de la recta preguntada es $10x + 24y =$	1 punto	$5x + 12y =$
$= 62$.	1 punto	$= 31$
Total:	**5 puntos**	

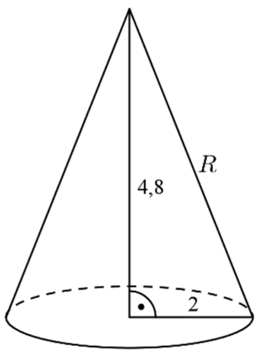
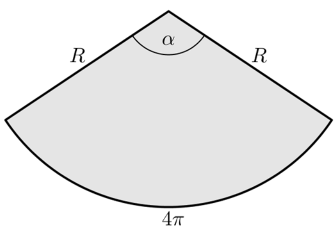
15. c) primer método		
$AB=\sqrt{(6-(-4))^2+(14-(-10))^2}=26$ $AC=\sqrt{(11-(-4))^2+(-2-(-10))^2}=17$ $BC=\sqrt{(11-6)^2+(-2-14)^2}=\sqrt{281}\ (\approx 16{,}76)$	2 puntos	
Sea α el ángulo buscado, aplicando el teorema del coseno al lado *BC* del triángulo *ABC*: $281=289+676-2\cdot 17\cdot 26\cdot\cos\alpha$	1 punto	
Viene que cos α ≈ 0,7738,	1 punto	
así α ≈ 39,3°.	1 punto	
Total:	**5 puntos**	

15. c) segundo método		
El ángulo interior del vértice *A* equivale a la diferencia de los ángulos de dirección de las rectas correspondientes a los lados *AB* y *AC*.  	1 punto	*También se dará este punto, si esta explicación se deduce únicamente de la resolución.*
(Sea δ el ángulo de dirección de la recta del lado *AB*) tg δ = 2,4.	1 punto	
(Sea ε el ángulo de dirección de la recta del lado *AC*) $\text{tg}\ \varepsilon=\frac{8}{15}$.	1 punto	
δ ≈ 67,38°, ε ≈ 28,07°	1 punto	
Así α = δ – ε ≈ 39,3°.	1 punto	
Total:	**5 puntos**	

15. c) tercer método		
El ángulo buscado es el que forman los vectores de los lados: $\overrightarrow{AB}(10;\ 24)$ y $\overrightarrow{AC}(15;\ 8)$.	1 punto	
Por un lado, el producto escalar de los vectores vale $10\cdot 15+24\cdot 8=342$,	1 punto	
y por otro $26\cdot 17\cdot\cos\alpha$.	1 punto	
De donde cos α ≈ 0,7738,	1 punto	
así α ≈ 39,3°.	1 punto	
Total:	**5 puntos**	

II. B

16. a)		
El radio de una esfera mide 10 cm y el de la otra, 8 cm	1 punto	
El volumen de las esferas es $\frac{4}{3}\cdot 10^3\cdot\pi\approx 4189$ (cm^3), y $\frac{4}{3}\cdot 8^3\cdot\pi\approx 2145$ (cm^3),	1 punto	
en total, 6334 (cm^3) aproximadamente.	1 punto	
Que equivale al 80% del volumen del material utilizado para hacer el relleno sin la compresión,	1 punto	*También se dará este punto, si esta explicación se deduce únicamente de la resolución*
así el volumen del material sin comprimir es de $\frac{6334}{80}\cdot 100\approx 7918$ (cm^3),	1 punto	
que son 7,9 litros aproximadamente.	1 punto	
Total:	**6 puntos**	

16. b)		
 El radio R del sector circular coincide con la generatriz del cono,	1 punto	*También se dará este punto, si esta explicación se deduce únicamente de la resolución.*
que mide $R=\sqrt{2^2+4{,}8^2}=5{,}2$ (cm).	1 punto	
La longitud del arco correspondiente al sector circular es igual al perímetro de la base del cono,	1 punto	*También se dará este punto, si esta explicación se deduce únicamente de la resolución.*
que mide $2\cdot 2\cdot\pi$ ($\approx 12{,}57$ cm).	1 punto	
 Sea α el ángulo central del sector circular medido en grados, entonces $4\pi=\frac{\alpha}{360°}\cdot 2R\pi$,	1 punto	$\alpha=\frac{4\pi}{5{,}2}$ radianes =
de donde, $\alpha=\frac{2\cdot 360°}{5{,}2}\approx 138{,}5°$.	1 punto	$\frac{4}{5{,}2}\cdot 180°\approx 138{,}5°$
Total:	**6 puntos**	

16. c)

Los ojos pueden ser de 6 tamaños distintos.	1 punto	
(Indiquemos los botones de menor a mayor con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6.) Si el número 4 está arriba, entonces solo hay una posibilidad (4-5-6). Si es el 3 el que está arriba, entonces hay 3 posibilidades (3-4-5; 3-4-6; 3-5-6).	1 punto	*El tamaño de los tres botones del abrigo se puede elegir de* $\binom{6}{3}$ (= 20) *maneras distintas.*
Como en los anteriores, si el botón con el número 2 está arriba, entonces hay 6 posibilidades. Si el menor botón está arriba, para los otros hay 10 posibilidades.	1 punto	
En total, hay 1 + 3 + 6 + 10 = 20 maneras distintas de coser los botones del abrigo del muñeco.	1 punto	*Después se sobreentiende que al coser los botones se hará siguiendo el orden creciente de sus tamaños.*
Por lo tanto, la madre podría preparar $6 \cdot 20 = 120$ modelos distintos de muñecos.	1 punto	
Total:	**5 puntos**	

17. a)

En la primera hora, el coche recorrió 70 km y en la segunda hora, 120 km,	1 punto	
por lo cual el coche consumió un total de $\frac{70}{100} \cdot 6 + \frac{120}{100} \cdot 8{,}5 =$	1 punto	
= 4,2 + 10,2 litros de gasolina.	1 punto	
Así en total recorrió 190 km consumiendo 14,4 litros de gasolina.	1 punto	
Por lo tanto el consumo medio de todo el trayecto fue de $\frac{14{,}4}{190} \cdot 100 \approx$	1 punto	
≈ 7,6 litros (por cada 100 kilómetros).	1 punto	*No recibirá este punto si el alumno no aproxima o lo hace mal.*
Total:	**6 puntos**	

17. b) primer método

El coche consume 3,8 litros de gasolina por cada (25 · 1,6 =) 40 kilómetros.	1 punto	
El consumo medio es de $\frac{3{,}8}{40} \cdot 100 =$	1 punto	
= 9,5 litros en 100 kilómetros.	1 punto	
Total:	**3 puntos**	

17. b) **segundo método**		
El coche consume 3,8 litros de gasolina por cada $(25 \cdot 1{,}6 =)$ 40 kilómetros.	1 punto	
Como 100 km es 2,5 veces 40 km,	1 punto	
así el consumo medio será $2{,}5 \cdot 3{,}8 = 9{,}5$ litros en 100 kilómetros.	1 punto	
Total:	**3 puntos**	

17. c)		
(Sea x las millas que recorrió el primer día, entonces) $186 = x \cdot 0{,}9^6$.	2 puntos	
$x = \frac{186}{0{,}9^6} \approx 350$ millas recorrió el señor Kovács el primer día.	1 punto	
Total:	**3 puntos**	

Observación: Si el alumno escribe el recorrido de cada día (con una aproximación correcta) y a partir de ahí da la respuesta correcta, recibirá el total de los puntos.

17. d)		
Hay 10^4 maneras distintas de escribir los cuatro números con que terminan las matrículas.	1 punto	
Los números serán distintos en $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ (= 5040) casos.	1 punto	
La probabilidad de elegir una matrícula al azar y que los números que aparezcan en ella sean distintos es: $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{10^4} = 0{,}504$.	1 punto	
La probabilidad de elegir una matrícula que tenga números iguales es $1 - 0{,}504 = 0{,}496$.	1 punto	$0{,}504 > 0{,}5$
Por tanto la probabilidad de elegir una matrícula con todos los números distintos es mayor que la probabilidad de que tenga números iguales.	1 punto	
Total:	**5 puntos**	

18. a)		
La media de los ocho valores (medidos todos en $\frac{m}{s^2}$) es 9,85,	1 punto	*También se darán estos puntos si el alumno calcula la desviación típica con la calculadora directamente.*
la desviación típica $\sqrt{\frac{0{,}05^2+0{,}1^2+0{,}15^2+0^2+0{,}05^2+0{,}1^2+0{,}1^2+0{,}05^2}{8}} =$ $= \sqrt{\frac{0{,}06}{8}} = \sqrt{0{,}0075} \approx$	1 punto	
$\approx 0{,}087$,	1 punto	
que es menor que 0,1, por lo que la serie de mediciones es correcta.	1 punto	
Total:	**4 puntos**	

18. b)		
Calculamos la media a través de la media aritmética ponderada.	1 punto	*También se dará este punto, si esta explicación se deduce únicamente de la resolución.*
$\frac{2\cdot 9{,}7+7\cdot 9{,}75+10\cdot 9{,}8+8\cdot 9{,}85+7\cdot 9{,}9+6\cdot 9{,}95}{40} \approx$	1 punto	
$\approx 9{,}84 \left(\frac{m}{s^2}\right)$	1 punto	
Teniendo en cuenta que los datos están ordenados de menor a mayor, el resultado de las mediciones 20º y 21ª es 9,85 $\frac{m}{s^2}$,	1 punto	
así la mediana mide 9,85 $\left(\frac{m}{s^2}\right)$.	1 punto	
Total:	**5 puntos**	

18. c) primer método		
Si introducimos la primera bolita de cobre en el primer lugar, entonces la segunda bolita de cobre puede estar en 8 lugares.	1 punto	
De igual forma, si la primera bolita de cobre se introduce en el 2º, 3er, ..., 8º lugar del tubo, entonces la segunda bolita de cobre puede colocarse en 7, 6, ...,1 lugares distintos respectivamente.	2 puntos	
La suma de ellos corresponde al número de todas las ordenaciones posibles,	1 punto	*También se dará este punto, si esta explicación se deduce únicamente de la resolución.*
es decir, (8 + 7 + … + 1 =) 36.	1 punto	
Total:	**5 puntos**	

18. c) **segundo método**		
El número de las ordenaciones que nos pide el ejercicio es igual al total de las ordenaciones posibles menos las que no responden a las peticiones del problema.	1 punto	*También se dará este punto, si esta explicación se deduce únicamente de la resolución.*
El número de todas las ordenaciones distintas posibles (todas las formas de poder elegir el lugar de las dos bolitas de cobre de los 10 lugares) es: $\binom{10}{2}=$	1 punto	
= 45.	1 punto	
Si pusiéramos las dos bolitas de cobre juntas, entonces podrían estar en 9 “lugares” en el tubo.	1 punto	
45 – 9 = 36 casos en los que las dos bolitas de cobre no están juntas.	1 punto	
Total:	**5 puntos**	

18. c) **tercer método**		
Las 8 bolitas de hierro nos dan hasta 9 lugares de separación.	2 puntos	
De estos 9 lugares tenemos que elegir dos para las bolitas de cobre.	1 punto	
Así podemos obtener $\binom{9}{2}=$	1 punto	
= 36 maneras distintas.	1 punto	
Total:	**5 puntos**	

18. d)		
La probabilidad de que una medición sea exitosa es: 1 – 0,06 = 0,94.	1 punto	*También se dará este punto, si esta explicación se deduce únicamente de la resolución.*
(Como las mediciones son independientes) la probabilidad de que las 40 mediciones sean exitosas es: $0{,}94^{40} \approx$	1 punto	
≈ 0,084.	1 punto	
Total:	**3 puntos**	